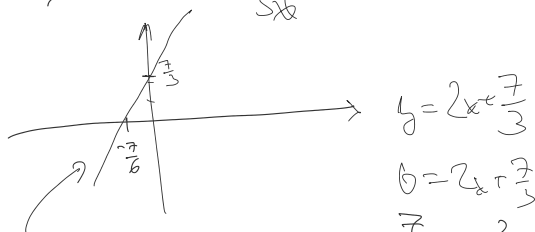


$$\begin{aligned}
 x(2x+1) + (3x+2)(2x+1) &= \\
 (2x+1)(x+3x+2) &= (2x+1)(4x+2) = \\
 &= 2(2x+1)(2x+1) = 2(2x+1)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ac + bc + ad + bd &= \\
 &= c(a+b) + d(a+b) = (c+d)(a+b)
 \end{aligned}$$

$$\frac{6x^2+7x}{3x} = \frac{x(6x+7)}{3x} = \frac{6x+7}{3} = 2x + \frac{7}{3}$$



$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + \frac{7}{3} \right\} \quad \begin{aligned} -\frac{7}{3} &= 2x \\ x &= -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

AFINNÍ FUNKCE

LINEÁRNÍ

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

f je lineární, pokud pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a
všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

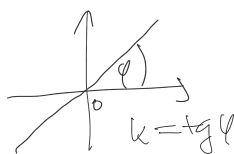
$$\begin{aligned}
 f(x+y) &= f(x) + f(y) \\
 f(\alpha x) &= \alpha f(x)
 \end{aligned}$$

Pokud $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

je lineární, má určitou

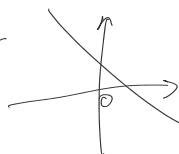
$$f(x) = kx$$

kde $k \in \mathbb{R}$

Funkce $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

se nazývá afinní, má-li tvar

$$f(x) = kx + q$$

 kde $k, q \in \mathbb{R}$ 

$$\begin{aligned}
 \frac{6x^3 + 4x^2 + 2x + 7}{2x^3 + 5x^2 - 3} &= \frac{x^3(6 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3})}{x^3(2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3})} = \\
 &= \frac{6 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}
 \end{aligned}$$

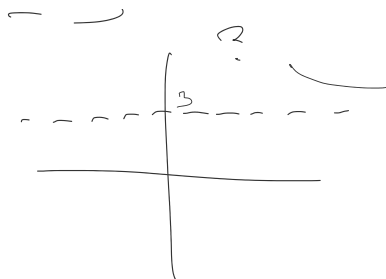
$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{6 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}} = 3$$

$\nearrow 0 \quad \nearrow 0 \quad \nearrow 0$

uvv
x → ∞

$$2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}$$

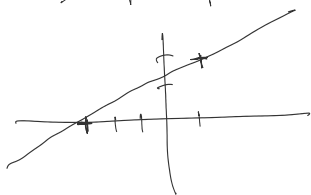
→ 0 → 0



Dány 2 bod y (1; 2) a (-3; 0)

najítte rovnici přímky procházející oběma body

$$\begin{aligned} 2 &= k + q & 2 &= 4k & k &= \frac{1}{2} \\ 0 &= -3k + q & q &= 3k & q &= \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \underline{\underline{y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}}}$$



Kvadratická rovnice

$$a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a) (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \quad b) (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$B^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$B = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\theta = \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$\theta = \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

↪ x₁ ↪ x₂

$$\theta = (x - x_1)(x - x_2)$$

Řešení m. m. m. (Q)

$$0 = (x - x_1) / (x - x_2)$$

Řešení rovnice (Q)

jsou následující:

(i) Pokud $b^2 - 4ac > 0$, pak řešení (Q) jsou

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ii) Pokud $b^2 - 4ac = 0$, pak řešením (Q) je jediným řešením $x = \frac{-b}{2a}$

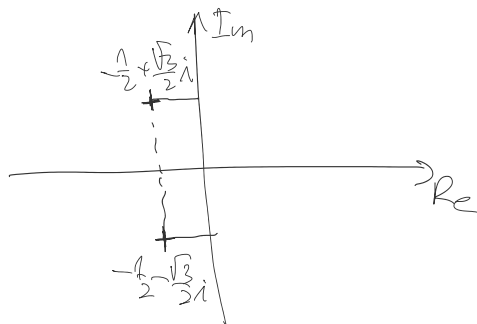
(iii) Pokud $b^2 - 4ac < 0$, nemá (Q) žádné řešení v $\mathbb{R}$

$x^2 + x + 1 = 0$ nemá řešení v $\mathbb{R}$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$$

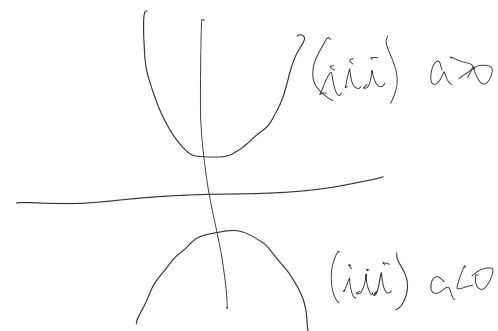
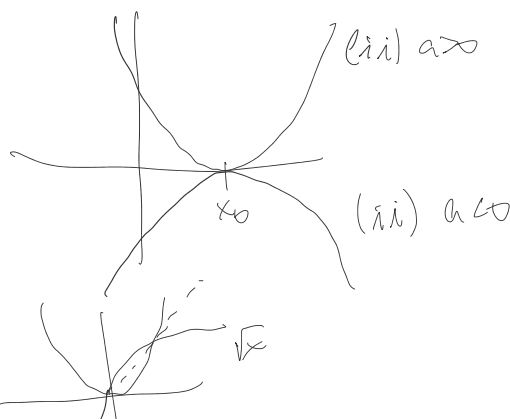
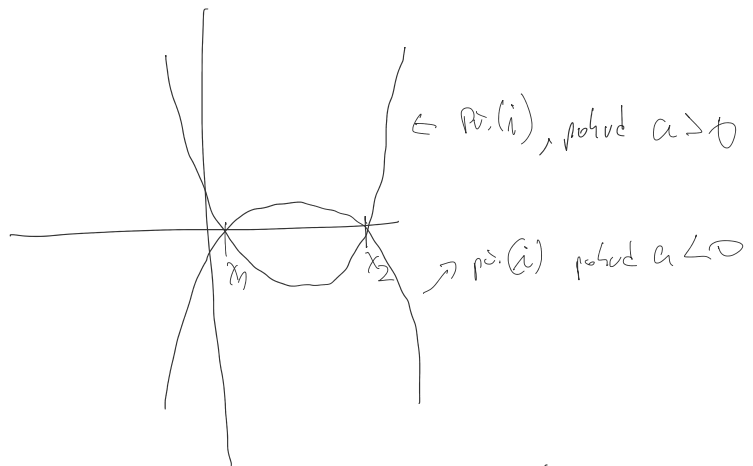
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$$



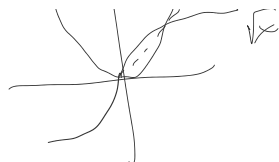
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= \begin{cases} (x - x_1)(x - x_2) & \text{(podle (i))} \\ (x - x_0)^2 & \text{(ii)} \\ ax^2 + bx + c & \text{(iii)} \end{cases}$$



$$ax^2 + bx + c = y$$





$$\frac{\overbrace{\sqrt{x^2-3x+6}}^A - \overbrace{\sqrt{x^2+3x-6}}^B}{} \quad (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

$$= \frac{x-2}{\cancel{x^2-3x+6} - (\cancel{x^2+3x-6})} = \frac{-6x+12}{(x-2)(\underbrace{\sqrt{x^2-3x+6} + \sqrt{x^2+3x-6}}_d)} = -6 \frac{x-2}{(x-2)d} = \frac{-6}{d}$$

Dokaz

Dokažte, že:

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ $x \geq 0, y \geq 0$, platí:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$\underbrace{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}_{\in \mathbb{R}} \geq 0$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$A = \sqrt{x} \quad B = \sqrt{y}$$

Indukce:

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí výrok $V(n)$

Matematická indukce:

1. krok: dokážeme, že tvrzení V platí pro $n=1$ 2. krok: předpokládáme, že V platí pro $n \in \mathbb{N}$, dokážeme, že V platí pro $n+1$

Dokažte:

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, platí Bernoulliho nerovnost

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Indukce podle n :

$$n=1 \quad 1+x \geq 1+x \quad \checkmark$$

$$n \Rightarrow n+1$$

$$IP: (1+x)^n \geq 1+nx$$

$$\text{chci } (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x)$$

$$\geq \underbrace{(1+nx)}_{1 \dots \dots \dots 2} (1+x)$$

$$\begin{aligned}
(1+x) &\geq (1+nx)(1+x) \\
&= 1+nx+x+nx^2 \\
&= 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\
&\geq 1+(n+1)x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n=1 \quad (1+x)^1 &\geq 1+nx \\
1+x &\geq 1+x \quad \checkmark \quad x \geq -2 \rightarrow \oplus
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n=2 \quad (1+x)^2 &= 1+2x+x^2 \\
&\geq 1+2x \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$$n \rightarrow n+2$$

$$IP: (1+x)^n \geq 1+nx$$

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+2} &= (1+x)^n (1+x)^2 \\
&\stackrel{IP}{\geq} (1+nx) \underbrace{(1+x)^2}_{\geq 0} = (1+nx) (1+2x+x^2) = \\
&= 1+2x+x^2 + nx+2nx^2+nx^3 = \\
&= 1+(n+2)x + \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{2nx^2}_{\geq 0} + \underbrace{nx^3}_{\geq 0} \geq \oplus \\
&\geq 1+(n+2)x
\end{aligned}$$

Dokaŕte:

Nechť $n \in \mathbb{N}$,

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Pak platí

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \\
\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) &\geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \right)$$

Dokaz indukcií

1) $n=1$

2) $n \rightarrow 2n$

3) $n \rightarrow n-1$

1.) $n=1$ $\frac{x_1}{1} = \sqrt[1]{x_1}$ ✓
 $x_1 = x_1$

2.) $n \rightarrow 2n$

IP: $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$

$$\frac{x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{2n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{2n} \geq$$

$$\stackrel{IP}{\geq} \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}}}{2} \geq \sqrt[n]{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}}}$$

$$= \sqrt[2n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}}$$

3.) IP: $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$ Platí pre $\forall x_1, \dots, x_n \geq 0$

chci: $\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1}}$ ← pre $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$
 platí triviálne

Obzao: $D = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$
 nechť $D \neq 0$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + D}{n} \stackrel{IP}{\geq} \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot D}$$

||
(LS)

(LS)

||

$$\frac{(n-1)D + D}{n} = \frac{Dn - D + D}{n} = D$$

$$D \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n-1}} \cdot \sqrt[n]{D} \quad D \neq 0$$

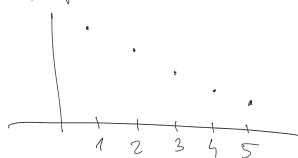
$$D^{1-\frac{1}{n}} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n-1}}$$

$$D^{1-\frac{1}{n}} \geq (x_1 \cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}}$$

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \quad D^{n-1} \geq (x_1 \cdots x_{n-1})$$

$$D \geq \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}}$$

Posloupnost reálných čísel je zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$

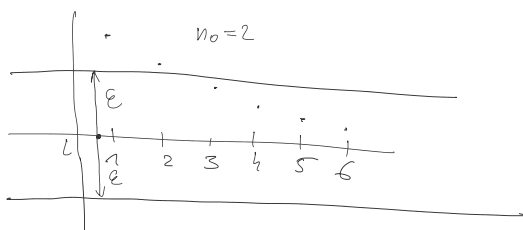


Definice limity

necht $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

je reálná posloupnost

Pak číslo $L \in \mathbb{R}$ je (vlastní) limit posloupnosti a_n
pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
pro všechna větší $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$
platí $|a_n - L| < \varepsilon$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + 1}{2n^3 - n^2 + 7} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

↓ Věk o aritmetice limit $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3})}{n^3(2 - \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3})} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Existuje tato limita?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} = ? \quad e$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= \frac{9}{4} \\ a_3 &= \frac{6^3}{2^7} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 1 + \frac{1}{n} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ (1 + \varepsilon)^n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \\ \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x$$



Věta: pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje vlastní
(limita posloupnosti $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, kde

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Funkce exp: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

přímý limit
vlastní

násobíme exponenciální faktor

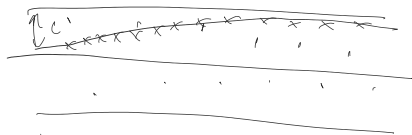
$$\text{známe } \exp(0), e^x$$

Dokážeme:

- 1.) (a_n) je neklesající, tj. $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
- 2.) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je omezená, tj. existuje $C > 0$ (etd)
tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| < C$



199, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$



Nechť $x \in \mathbb{R}$

1.) Chci $a_{n+1} \geq a_n$

pro $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$1 + \frac{x}{n+1} = \frac{n+1+x}{n+1} = \frac{n(1+\frac{x}{n})+1}{n+1} \stackrel{AG_{n+1}}{\geq} \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot 1}$$

$$\underbrace{x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1 + \frac{x}{n}}_{x_{n+1} = 1} \quad \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

2.) Chci: $c > 0$ a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$c \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Bernoulli $(1+y)^n \geq 1+ny$
 $y = \frac{x}{n}$

2a) Ukažte, že $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Bernoulli: $\rightarrow x \geq -1$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + nx \geq 0$$

2b) Chci $c > 0$, aby

$$c \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

c může záviset na x , ne však na n

$$c \stackrel{?}{\geq} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$c \stackrel{?}{\geq} \frac{1}{n} \geq \frac{n+x}{n^2}$$

$$\frac{n}{n+x} \geq \frac{1}{c}$$

Paritě: $x > -1$
 $\text{tj. } n+x > 0$

$$\frac{n}{n+x} \geq \frac{1}{c} \quad \frac{n}{n+x} \geq \frac{n}{n+1}$$

$$k = \lceil x \rceil := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid x \leq k\}$$

$$\Rightarrow k > x$$

ceiling

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} = \frac{1}{2} \quad 2k \leq n+k$$

$$k \leq n$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+x} &\geq \frac{n}{n+k} \\ \text{Pro } m > \lceil x \rceil \\ u_1 = u_2 = \dots = u_{2k} &= \frac{1}{2} \quad 2k \leq m+k \\ u_{2k+1} = u_{2k+2} &= 1 \quad k \leq m \\ \text{počet} &= m-k \quad (2k) \text{ krát} \quad (m-k) \text{ krát} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + 1 + \dots + 1 &= m+k \\ \frac{n}{n+x} &\geq \frac{1}{4^{\frac{1}{m+k}}} \\ \frac{n}{n+x} &\geq \frac{1}{4^{\frac{k}{m+k}}} = 4^{\frac{k}{m+k}} \geq \frac{m+k}{m} = 1 + \frac{x}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+x} &\geq \frac{m+k}{m} \\ (4^k)^{\frac{1}{m}} &\geq (4^k)^{\frac{1}{m+k}} \quad k \geq 0 \\ (4^k)^{\frac{1}{m+k}} &\geq (4^k)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

$m > \lceil x \rceil$ Dostali jsme: Pro $\forall m > \lceil x \rceil$: $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \leq 4^{\frac{\lceil x \rceil}{m}}$

Pokud $\lceil x \rceil = 0$, máme $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \leq 4^0 = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \checkmark$

Pokud $\lceil x \rceil \geq 1$, máme (*) pouze pro $m > \lceil x \rceil$

zřejmě $C_1 = \max \left\{ \left| 1 + \frac{x}{m} \right|^m \mid 1 \leq m \leq \lceil x \rceil \right\}$

Pro $m = \lceil x \rceil$ máme $\left| 1 + \frac{x}{m} \right|^m \leq C_1$

Dolím $C_2 = \max \{C, C_1\}$,
pak $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left|1 + \frac{x}{n}\right|^n \leq C_2$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je neklesající (1)
a omezená (2)
 $\Rightarrow \exists$ limita

Dostali jsme
pro $\forall n \geq$
 $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
"
 $\left|1 + \frac{x}{n}\right|^n$

Vezmeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n =: e^x$$

Účta: Existuje jediná funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje podmínky:

$$(1) f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$(2) f(x) \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tato funkce navíc splňuje
 $f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Jiný způsob

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \end{aligned}$$

Taylorova věta

Je-li $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že existují derivace f všech řádů ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$, potom pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ a každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n}_{\text{Taylorova věta}}$$

Mezou věty:

O exp víme:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Tím pádem platí

$$\exp^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dosazením do Taylora ($f = \exp$): $x_0 = 0$

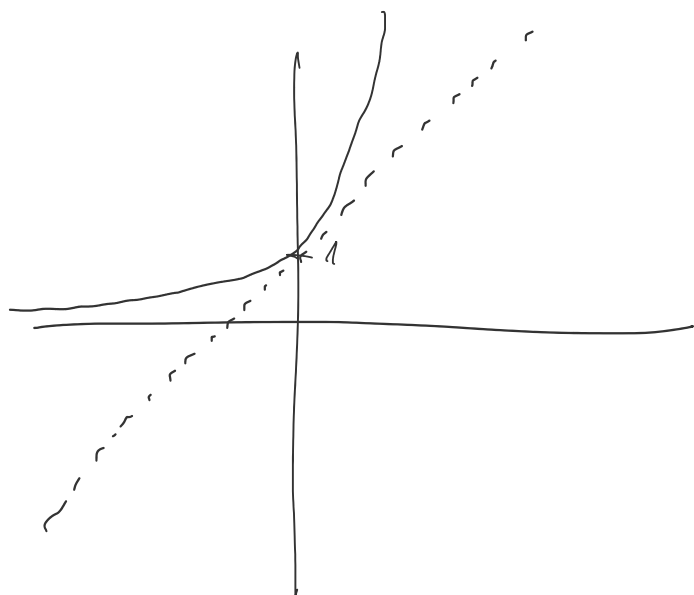
$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ještě jiný způsob, jak zavést e^x

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{y} dy; \quad x \in (0; \infty)$$

e^x definujeme potom jako inverzi k funkci $\ln$.

(musí se chápat, že $\ln$ je prostě zobrazení
 $(0; \infty)$ na $\mathbb{R}$)



$$e^0 = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y$$

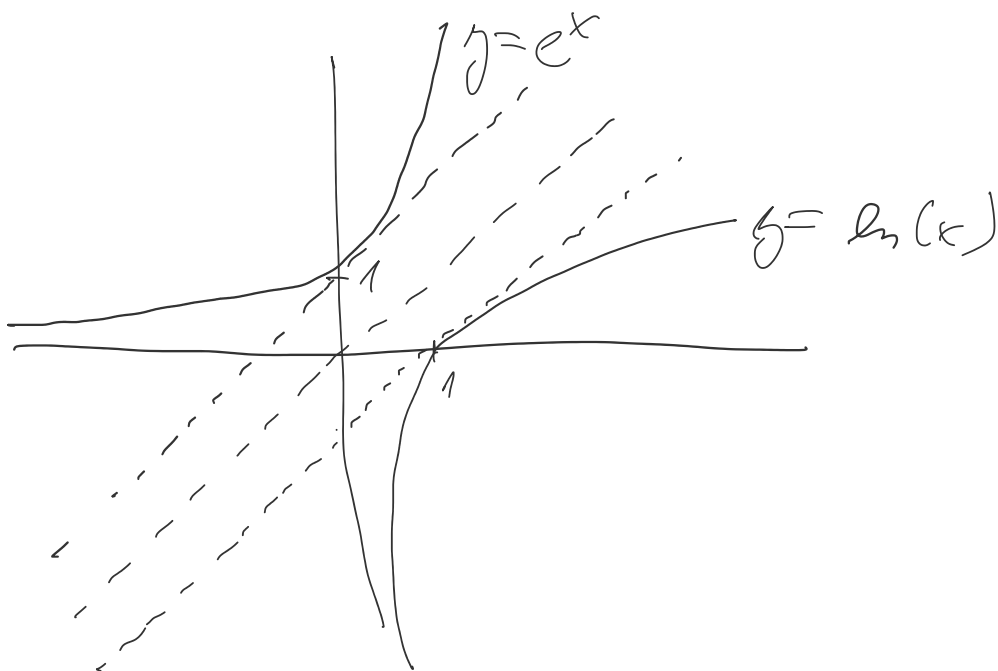
$$e^x < e^y$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$



$$y \mapsto x \\ e^x = y$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\forall x \in (0, \infty):$$

$$\ln x \leq x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$\ln(0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

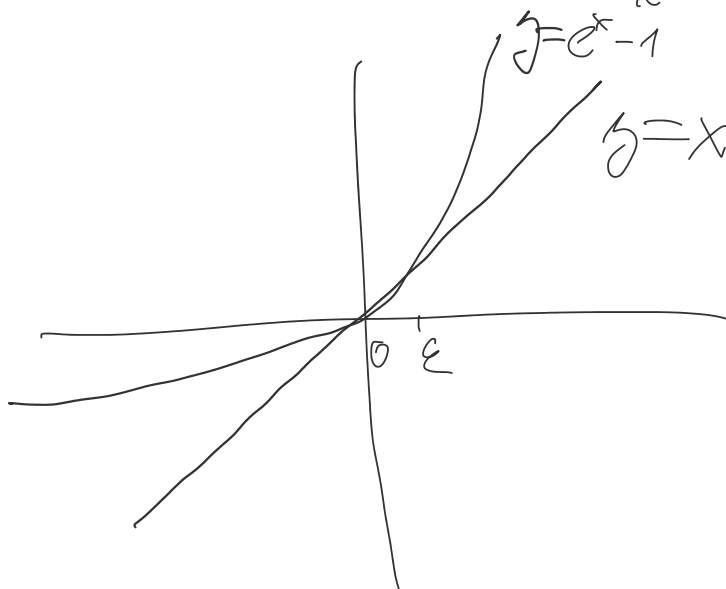
$$\forall x, y \in (0; \infty)$$

$$\ln x < \ln y$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} |e^x - 1 - x| = 0$$