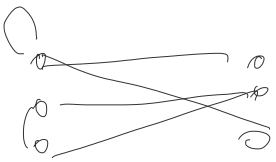
Přednáška 1

úterý 24. ledna 2023 21:01

MUŽI ŽENY

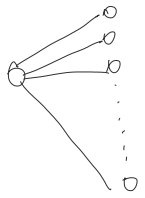
$P(P|M) = \frac{\sum P_{PM}}{P_M}$ $\quad \sum P_{PM} = \sum P_{P\check{Z}}$

$P(P|\check{Z}) = \frac{\sum P_{P\check{Z}}}{P_{\check{Z}}}$



BIPARTITNÍ GRAF

$\frac{P(P|M)}{P(P|\check{Z})} = \frac{\frac{\sum P_{PM}}{P_M}}{\frac{\sum P_{P\check{Z}}}{P_{\check{Z}}}} = \frac{\sum P_{PM}}{P_M} \cdot \frac{P_{\check{Z}}}{\sum P_{P\check{Z}}} = \frac{P_{\check{Z}}}{P_M}$?



Logický úsudek

Když bude mít úraz hlavy, ztratím paměť.

Pokud ztratím paměť a vrátím se, stane se ze mne alkoholik.

Stal se mi úraz hlavy.

Nikdy se nevrátím, stane se ze mě alkoholik.

Výroky: V, Z, R, A

1.) Pokud V, pak Z. Předpoklad (P)

2.) Pokud Z a R, pak A. (P)

3.) V

4.)	R	(P)
5.)	Z	2.
6.)		2

5.) Z ?

6.) Z × R ?

7.) A ?

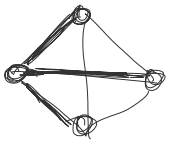
Pokud R, pak A ?

$U \Rightarrow Z$ $\quad U \xrightarrow{f} Z$

$Z \wedge R \Rightarrow A$ $\quad Z \times R \xrightarrow{g} A$

$$\frac{U}{R \Rightarrow A} \qquad \frac{u \in U}{R \xrightarrow{h} A}$$

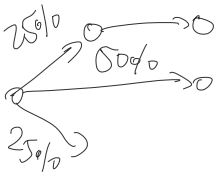
$h(r) = g(f(u), r)$



Pod. stěn — grafy, grafové algoritmy STP spanning tree protocol

Architektura počítačů — logické obvody, booleovské funkce

3. semestr pravděpodobnost & statistika Markovovy chains

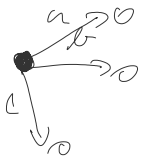


Algoritmizace — rekurze, stromy, grafy, prohledávání

4. semestr: DBS: grafové databáze datalog

SQL: databázový jazyk

LSP: jazyky, automaty, gramatiky



Funkcionální programování — Scheme, Haskell

λ-calculo

ZUI — heuristiky, logika & reprezentace znalostí

epistemická logika X

Zápočet 2 sem. testy < 0 ... 15 b logika
0 ... 15 b grafy

Zkouška < minimální — 0 ... 10, alespoň 8 — nomin
standardní — 0 ... 60, alespoň 20 — nomin

Cvičení 1

pondělí 20. února 2023 12:47

Indukce & rekurse

1. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ def. $U_n = 0^3+1^3+2^3+\dots+n^3 = \sum_{j=0}^{n} j^3$

$0 \in \mathbb{N}$ Pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Dk: MI

(0) $n=0$ $U_0 = 0^3 = 0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$ ✓

(1) $n \geq 0$ IP $U_n = \sum_{j=0}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$U_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} j^3 = \sum_{j=0}^{n} j^3 + (n+1)^3 \overset{IP}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4} \quad \square$$

Zákl. krok

Indukční krok

$\boxed{n=0}$ $0=0$

(IP) pro n platí $R(n)$

Potom $R(n+1)$

$\boxed{R(0)}$

$$\forall n \, (R(n) \Rightarrow R(n+1))$$

Mám $n \in \mathbb{N}$; vím

$$U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Ptám se platí $U_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$?

$$U_{n+1} = \underbrace{0^3+1^3+2^3+\dots+n^3}_{U_n} + (n+1)^3 \ ?$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^3 4}{4} = \frac{4(n+1)^3 + n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$$

Tedy (díky mat. indukci)

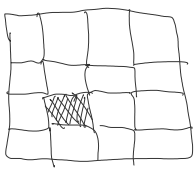
platí $R(n)$

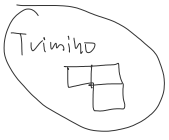
pro vš. $n \in \mathbb{N}$

Místnost typu n)

je čtvercová síť rozměrů $2^n \times 2^n$ s jedním odstraněným polem

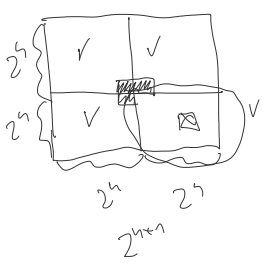
$\boxed{n=2}$





Vymyslete rekursivní algoritmus na dláždění místností a dokažte jeho korektnost

$\boxed{n=0}$ $\boxed{n=1}$ Vydláždit místnost typu $(n+1)$



Induktivně definované množiny

$T \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ je zadána induktivními pravidly:

1. $(0,0) \in T$
2. pokud $(n,m) \in T$, pak i $(n, m+1) \in T$
3. pokud $(n,m) \in T$, pak i $(n+1, m) \in T$
4. pokud $(n,m) \in T$, pak i $(n+1, m+1) \in T$

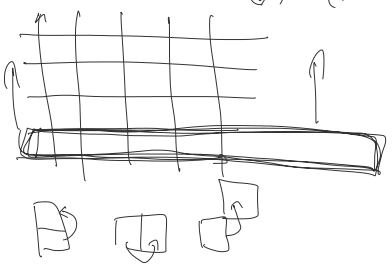
1. $\overline{(0,0)\in T}$
2. $\dfrac{(n,m)\in T}{(n,m+1)\in T}$
3. $\dfrac{(n,m)\in T}{(n+1,m)\in T}$
4. $\dfrac{(n,m)\in T}{(n+1,m+1)\in T}$

(I) Dokažte dvěma „různými" způsoby, že $(4,3) \in T$

(II) Dokažte, že $T = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ((III) Jak vypadá T bez 1? 2? 3? 4?)

Dk: (I): $(0,0) \xrightarrow{2.} (1,0) \xrightarrow{1.} (1,1) \to (2,1) \to (3,1) \to (4,1) \to (4,2) \to (4,3)$ □

1. $\overline{(0,0)} \in T$
4. $\overline{(1,1)} \in T$
4. $\overline{(2,2)} \in T$
4. $\overline{(3,3)} \in T$
3. $\overline{(4,3)} \in T$



$\forall m \in \mathbb{N}\ (\forall n \in \mathbb{N};\ (n,m) \in T)$

Zahl. mat.

Pro $m=0$: $\forall n \in \mathbb{N}\ (n,0) \in T$

indukcí

Pro $n=0$ $(0,0) \in T$? ✓

1. pravidlo

(IP) Pro $n \in \mathbb{N}$ vím $(n,0) \in T$;

musím dokázat $(n+1, 0) \in T$

(3. pr. s $m=0$)

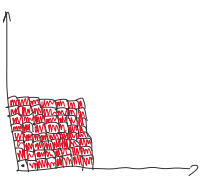
Vím: pro $m \in \mathbb{N}$ platí:

$\forall n \in \mathbb{N}: (n,m) \in T$ (IP)

Chci: $\forall n \in \mathbb{N}: (n, m+1) \in T$

Ať $n \in \mathbb{N}$. Platí $(n, m+1) \in T$?

Z (IP) $(n,m) \in T$. Pravidlem 2 tedy $(n, m+1) \in T$



$S \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $(0,0) \in S$

$\dfrac{(n,m) \in S}{(n,m+1) \in S}$

$\dfrac{(n,m) \in S}{(n+1,m) \in S}$

$\dfrac{(n,m) \in S}{(n+1,m+2) \in S}$

Přednáška 2

úterý 21. února 2023 12:47

Syntax výrokové logiky

At – množina atomických formulí (volitelná část)

$Fm(At)$ množina formulí nad množinou At BNF – Backus-Naur form

$\| Fle(At)$

$$F ::= a \mid \top \mid \bot \mid (\neg F) \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \Rightarrow F) \mid (F \Leftrightarrow F)$$

$a \in At$

negace
unární logická spojka

konjunkce
binární

$At := \{a, b, c, d\}$

Př. formulí: $(a \wedge (b \vee c))$, $(\neg b)$, c, $((\neg a) \Rightarrow (\neg b))$ | $\times$ $\| a \wedge$ není formule

! URP – unique readability property

Neformálně: v každé formule – jednoznačně určíme hlavní spojku
– stavební části, které spojku spojuje

$(a \wedge (b \vee c))$

Hl. spojka

vrstevnice

$\cancel{(}(\neg a) \Rightarrow (\neg b)\cancel{)} \rightsquigarrow (\neg a) \Rightarrow (\neg b) \rightsquigarrow \neg a \Rightarrow \neg b$

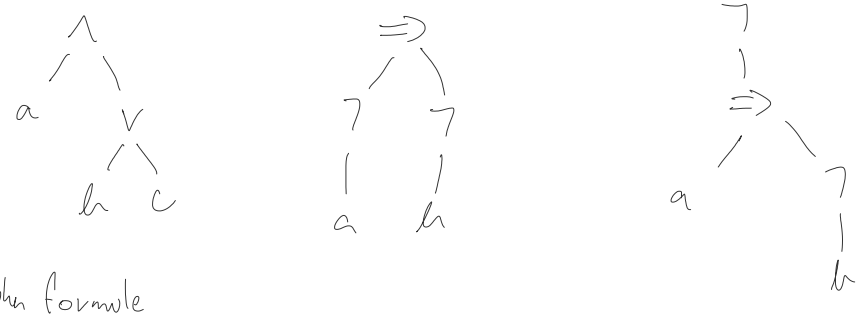
relaxace značení

negace „váže nejsilněji"

$\neg(a \Rightarrow (\neg b))$

Syntaktický strom formule

$\alpha := (a \wedge (b \vee c))$ $\beta : ((\neg a) \Rightarrow (\neg b))$ $\gamma := \neg(a \Rightarrow (\neg b))$



Hloubka formule

$Fm(At) \xrightarrow{hl} \mathbb{N}$ je definovaná rekursivně

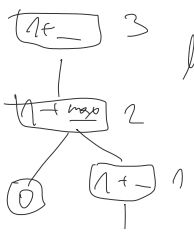
$hl(\varphi)$

case φ

$a \in At$ ret 0 $\top, \bot$: return 0 (true, false)

$\neg\psi$: ret $1 + hl(\psi)$

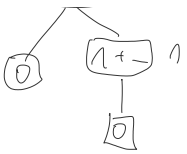
$\| \circ \varphi$ ret $1 + \max(hl(\psi), hl(\chi))$ $\| \circ$ je $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$



$hl(\gamma) = 3$

$\neg\psi$: $\mathrm{ret}\ 1 + hl(\psi)$

$\psi \circ \chi$ $\mathrm{ret}\ 1 + \max(hl(\psi), hl(\chi))$ // o je $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$



Podformule (množina podformulí)

$Fm(At) \xrightarrow{pf} P(Fm(At))$

φ — prvky formule

powerset

prvky: množiny formulí

pf(φ)

case φ:

a∈At: ret {a}, T ret {T}, ⊥ ret {⊥}

¬ψ: ret {¬ψ} ∪ pf(ψ)

ψ∘χ: ret {ψ∘χ} ∪ pf(ψ) ∪ pf(χ)

$pf(B) = \{B, \neg a, \neg b, a, b\}$

Přirozená dedukce

je důkazový systém

Používá odvozovací pravidla

předpoklady (mn. formulí)

logický důsledek

φ logicky plyne z Γ

(je logickým důsledkem)

množiny předpokladů Γ

Zavaděcí pravidla

$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ i\wedge$

$\dfrac{p \in A \times B}{fst(p)\ A}$

$\dfrac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}\ e\Rightarrow$

eliminační pravidla

$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ e\wedge_1$ $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ e\wedge_2$

$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \Rightarrow \psi}$

$a \wedge b,\ b \Rightarrow c \vdash c$

1. $a \wedge b$ P
2. $b \Rightarrow c$ P
3. b $e\wedge_2, 1$
4. c $e\Rightarrow, 3, 2$

$a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow c,\ a \vdash b \wedge c$

1. $a \Rightarrow b$ P
2. $b \Rightarrow c$ P
3. a P
4. b $e\Rightarrow, 3, 1$
5. c $e\Rightarrow, 4, 2$
6. $b \wedge c$ $\wedge, 4, 5$

Přednáška 3

pondělí 27. února 2023 11:02

Přirozená dedukce

zavádějící pravidla

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\, i\wedge$$

eliminační pravidla

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\, e\wedge_1 \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\, e\wedge_2$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \Rightarrow \psi}\, i\Rightarrow$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}\, e\Rightarrow$$

Př. $a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow c \vdash a \Rightarrow c$

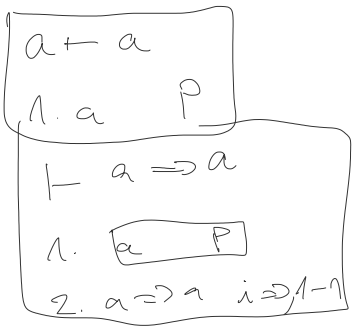
1.	$a \Rightarrow b$	P
2.	$b \Rightarrow c$	P
3.	a	P
4.	b	$e\Rightarrow 3,1$
5.	c	$e\Rightarrow 4,2$
6.	$a \Rightarrow c$	$i\Rightarrow 3\text{-}5$

$a \Rightarrow b \quad c \Rightarrow d \vdash (a \wedge c) \Rightarrow (b \wedge d)$

1.	$a \Rightarrow b$	P
2.	$c \Rightarrow d$	P
3.	$a \wedge c$	P
4.	a	$e\wedge 3$
5.	c	$e\wedge 3$
6.	b	$e\Rightarrow 4,1$
7.	d	$e\Rightarrow 5,2$
8	$b \wedge d$	$i\wedge 6,7$

8 $b \wedge d$ $i \wedge 6, 7$

a. $(a \wedge c) \Rightarrow (b \wedge d)$ $i \Rightarrow 3-8$



$a \vdash a$

1. a P

$\vdash a \Rightarrow a$

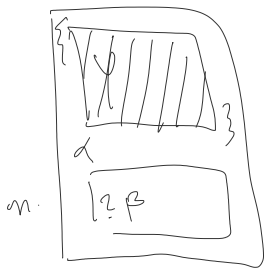
1. a P
2. $a \Rightarrow a$ $i \Rightarrow 1-1$

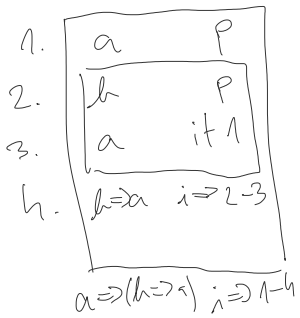
? $\cancel{\vdash a}$ 1. a P X

fn f (in +1)
ret square (i)+1

$(a \wedge b) = c \vdash a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$

1. $(a \wedge b) \Rightarrow c$ P
2. a P
3. b P
4. $a \wedge b$ $i \wedge 2,3$
5. c $e \Rightarrow 4,1$
6. $b \Rightarrow c$ $i \Rightarrow 3-5$
7. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ $i \Rightarrow 2-6$





DCV
$a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \vdash (a \wedge b) \Rightarrow c$

$\{ \psi \}$
α
n. ? β

$\vdash a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$

1. a P
2. b P
3. a $i+1$
4. $b \Rightarrow a$ $i \Rightarrow 2-3$

$a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$ $i \Rightarrow 1-4$

Disjunkce

zavádící

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ iv_1 \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ iv_2$$

eliminační

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{matrix}\varphi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}$$

Př. $a \vee b,\ a \Rightarrow (c \wedge d),\ b \Rightarrow d \vdash d$

1. $a \vee b$ P
2. $a \Rightarrow (c \wedge d)$ P
3. $b \Rightarrow d$ P

$\varphi \vee \psi$ $\qquad$ $\varphi \vee \psi$ $\qquad$ $\dfrac{\boxed{\chi}\ \boxed{\chi}}{\chi}$

2. $a \Rightarrow (c \wedge d)$ $\quad$ P
3. $b \Rightarrow d$ $\quad$ P
4. a $\quad$ P
5. $c \wedge d$ $\quad$ $e \Rightarrow 4,2$
6. d $\quad$ $e \wedge 2,5$
7. b $\quad$ P
8. d $\quad$ $e \Rightarrow 7,3$
9. d $\quad$ $e \vee 1,4-6,7-8$

$a \vee b \vdash b \vee a$

1. $a \vee b$ $\quad$ P
2. a $\quad$ P
3. $b \vee a$ $\quad$ $i \vee 2,2$
4. b $\quad$ P
5. $b \vee a$ $\quad$ $i \vee 1,4$
6. $b \vee a$ $\quad$ $e \vee 1,2-3,4-5$

Negace a absurdita (spor)

$\neg$ $\qquad$ $\bot$

zavádící

$$\frac{\boxed{\begin{matrix}\varphi \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}}{\neg\varphi}\ i\neg$$

eliminační

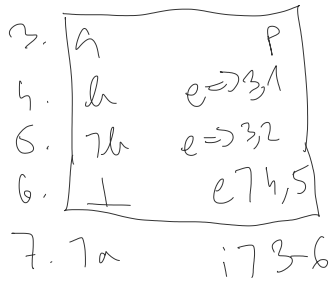
$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ e\neg \quad \cancel{(\bot)}$$

$$\frac{\bot}{\varphi}\ e\bot$$

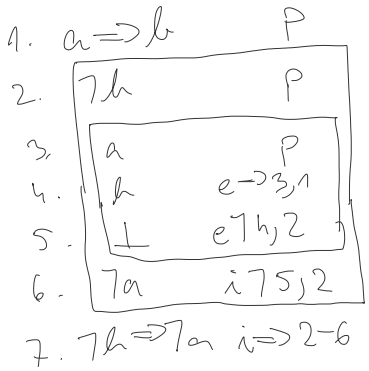
nelze zavést

Př $\quad a \Rightarrow b,\ a \Rightarrow \neg b \vdash \neg a$

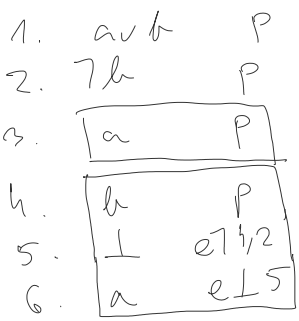
1. $a \Rightarrow b$ $\quad$ P
2. $a \Rightarrow \neg b$ $\quad$ P



$a \Rightarrow b \vdash \neg b \Rightarrow \neg a$



$a \vee b, \neg b \vdash a$



Cvičení 2

pondělí 27. února 2023 12:48

Ve všech příkladech můžete předpokládat, že zadané řetězce jsou formulemi výrokové logiky. Sestrojte důkazy přirozenou dedukcí.

Základní příklady

1. $a \wedge b \vdash b \wedge a$.
2. $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$.
3. $q \vdash (q \Rightarrow r) \Rightarrow r$.
4. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \vdash (a \wedge b) \Rightarrow c$.
5. $\vdash \neg(a \wedge b) \Rightarrow (a \Rightarrow \neg b)$.
6. $\vdash \{(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)\} \Rightarrow \neg(a \wedge b)$.
7. $\vdash (a \wedge b) \Rightarrow \{(a \Rightarrow c) \Rightarrow \neg(b \Rightarrow \neg c)\}$.
8. $(p \vee q) \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$.
9. $a \vee b \vdash b \vee a$.
10. $\neg a \wedge \neg b \vdash \neg(a \vee b)$.
11. $w \Rightarrow x, y \Rightarrow z \vdash (w \vee y) \Rightarrow (x \vee z)$.
12. $\vdash (a \vee (b \wedge a)) \Rightarrow a$.
13. $\neg a \vee \neg b \vdash \neg(a \wedge b)$.

Nepřímé důkazy

1. $\neg p \Rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash p$.
2. $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$.

Příklady s ekvivalencí

1. $\vdash \neg(a \Leftrightarrow \neg a)$.
2. $a \Leftrightarrow b \vdash (\neg a \Leftrightarrow \neg b)$.

Příklady s využitím LEM V těchto příkladech využijte ke zkrácení důkazu pravidlo vyloučeného třetího (LEM).

1. $a \Rightarrow b \vdash \neg a \vee b$.
2. $\vdash a \Rightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b))$.

---

① $a \wedge b \vdash b \wedge a$

1.	$a \wedge b$	P
2.	a	$e\wedge_1 1$
3.	b	$e\wedge_2 1$
4.	$b \wedge a$	$i\wedge 2,3$

② $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	P
2.	$s \wedge t$	P
3.	$(p \wedge q)$	$e\wedge_1 1$
4.	q	$e\wedge_2 3$
5.	s	$e\wedge_1 2$
6.	$q \wedge s$	$i\wedge 4,5$

③ $q \vdash (q \Rightarrow r) \Rightarrow r$

1.	q	P
2.	$q \Rightarrow r$	P
3.	r	$e\Rightarrow 1,2$
4.	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow r$	$i\Rightarrow 2\text{-}3$

④ $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \vdash (a \wedge b) \Rightarrow c$

1.	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$	P
2.	$a \wedge b$	P
3.	a	$e\wedge_1 2$
4.	b	$e\wedge_2 2$
5.	$b \Rightarrow c$	$e\Rightarrow 3,1$
6.	c	$e\Rightarrow 4,5$
7.	$(a \wedge b) \Rightarrow c$	$i\Rightarrow 2\text{-}6$

⑤ $\vdash \neg(a \wedge b) \Rightarrow (a \Rightarrow \neg b)$

1.	$\neg(a \wedge b)$	P
2.	a	P
3.	b	P
4.	$a \wedge b$	$i\wedge 2,3$
5.	$\bot$	$e\neg 4,1$
	$\neg b$	$e\neg 4\text{-}6$
	$a \Rightarrow \neg b$	$i\Rightarrow 2\text{-}7$

⑥ $\vdash \{(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)\} \Rightarrow \neg(a \wedge b)$

1.	$(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)$	P
2.	$a \Rightarrow c$	$e\wedge 1$
3.	$b \Rightarrow \neg c$	$e\wedge 1$
4.	$a \wedge b$	P
5.	a	$e\wedge 4$
6.	b	$e\wedge 4$
7.	c	$e\Rightarrow 5,2$
8.	$\neg c$	$e\Rightarrow 6,3$
9.	$\bot$	$e\neg 7,8$
10.	$\neg(a \wedge b)$	$i\neg 4\text{-}9$
11.	$\{(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)\} \Rightarrow \neg(a \wedge b)$	$i\Rightarrow 1\text{-}10$

⑦ $\vdash (a \wedge b) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \Rightarrow \neg(b \Rightarrow \neg c))$

1.	$a \wedge b$	P
2.	a	$e\wedge_1 1$
3.	b	$e\wedge_2 1$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}$$

2. a — e∧1 1
3. b — e∧2 1
4. a ⇒ c — P
5. c — e⇒ 2,4
6. b ⇒ ¬c — P
7. ¬c — e⇒ 3,6
8. ⊥ — e¬ 7,5
9. ¬(b ⇒ ¬c) — i¬ 6-8
10. (a ⇒ c) ⇒ ¬(b ⇒ ¬c) — i⇒ 4-9
11. b ⇒ d ⇒ ((a ⇒ c) ⇒ ¬(b ⇒ ¬c)) — i⇒ 1-10

(8.) $(p \vee q) \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$

1. $(p \vee q) \Rightarrow r$ — P
2. p — P
3. $p \vee q$ — i∨ 2
4. r — e⇒ 1,3
5. $p \Rightarrow r$ — i⇒ 2,4

(9.) $a \wedge (b \vee c) \vdash (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

1. $a \wedge (b \vee c)$ — P
2. a — e∧1 1
3. $b \vee c$ — e∧2 1
4. b — P
5. $a \wedge b$ — i∧ 2,4
6. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ — i∨ 5
7. c — P
8. $a \wedge c$ — i∧ 2,7
9. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ — i∨ 8
10. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ — e∨ 3, 4-6, 7-9

(10.) $\neg a \wedge \neg b \vdash \neg(a \vee b)$

1. $\neg a \wedge \neg b$ — P
2. $\neg a$ — e∧1 1
3. $\neg b$ — e∧2 1
4. $a \vee b$ — P
5. a — P
6. ⊥ — e¬ 2,5
7. b — P
8. ⊥ — e¬ 3,7
9. ⊥ — e∨ 4, 5-6, 7-8

10. ¬(a ∧ b) i¬ 9, 4-8

(11.) $w \Rightarrow x,\ y \Rightarrow z \vdash (w \vee y) \Rightarrow (x \vee z)$

1. $w \Rightarrow x$ P
2. $y \Rightarrow z$ P
3. $w \vee y$ P
4. w P
5. x e⇒ 4,1
6. $x \vee z$ i∨ 5
7. y P
8. z e⇒ 7,2
9. $x \vee z$ i∨ 8
10. $x \vee z$ e∨ 3, 4-6, 7-9
11. $(w \vee y) \Rightarrow (x \vee z)$ i⇒ 3-11

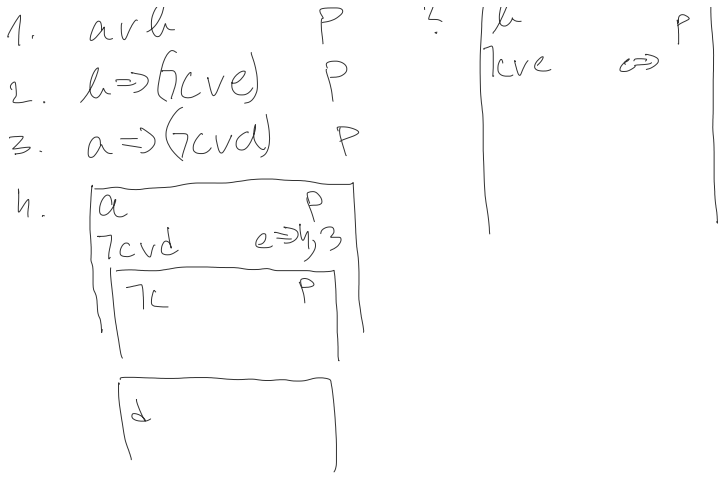
(13.) $\neg a \vee \neg b \vdash \neg(a \wedge b)$

1. $\neg a \vee \neg b$ P
2. $a \wedge b$ P
3. a e∧ 1, 2
4. b e∧ 2, 2
5. $\neg a$ P
6. $\bot$ e¬ 3, 5
7. $\neg b$ P
8. $\bot$ e¬ 4, 7
9. $\bot$ e∨ 1, 5-6, 7-8
10. $\neg(a \wedge b)$ i¬ 2-9

DÚ $a \vee b,\ b \Rightarrow (\neg c \vee e),\ a \Rightarrow (\neg c \vee d) \vdash c \Rightarrow (e \vee d)$

1. $a \vee b$ P
2. $b \Rightarrow (\neg c \vee e)$ P

? b P; $\neg c \vee e$ ⇒


1. a ∨ b P
2. b ⇒ (¬c ∨ e) P
3. a ⇒ (¬c ∨ d) P
4.
a P
¬c ∨ d e ⇒ y 3
¬c P
d
4. b
¬c ∨ e ⇨ P

Přednáška 4

pondělí 6. března 2023 11:02

Přív. dedukce

Poslední pravidlo pro negaci

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ e\neg\neg$$

Př. $\neg(a \wedge b) \vdash \neg a \vee \neg b$

1.	$\neg(a \wedge b)$	P
2.	$\neg(\neg a \vee \neg b)$	P
3.	$\neg a$	P
4.	$\neg a \vee \neg b$	$i\vee_1$ 3
5.	$\bot$	$e\neg$ 1,2
6.	$\neg\neg a$	$i\neg$ 3-5
7.	a	
8.	$\neg b$	P
9.	$\neg a \vee \neg b$	$i\vee_2$ 8
10.	$\bot$	$e\neg$ 9,2
11.	$\neg\neg b$	$i\neg$ 8-10
12.	b	$e\neg$ 7,11
13.	$a \wedge b$	$i\wedge$ 7,12
14.	$\bot$	$e\neg$ 13,1
15.	$\neg\neg(\neg a \vee \neg b)$	$i\neg$ 2-14
16.	$\neg a \vee \neg b$	$e\neg$ 15

Pravidlo vyloučeného třetího
(tertium non datur)
(law of exclude d middle)

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ \text{LEM}$$

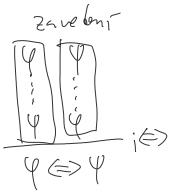
Př. $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$

1.	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	P
2.	φ	P
3.	$\varphi \vee \neg\varphi$	$i\vee_1$ 2
4.	$\bot$	$e\neg$ 3,1
5.	$\neg\varphi$	$i\neg$ 2-4
6.	$\varphi \vee \neg\varphi$	$i\vee_2$ 5
7.	$\bot$	$e\neg$ 6,1
8.	$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	$i\neg$ 1-7
9.	$\varphi \vee \neg\varphi$	$e\neg\neg$ 8

Def $\varphi, \psi \in Fm(A_t)$; φ a ψ jsou logicky ekvivalentní, pokud $\varphi \vdash \psi$ a $\psi \vdash \varphi$.

$\Leftrightarrow$ (ekvivalence)

zavedení



$$\frac{\varphi \vdash \psi \quad \psi \vdash \varphi}{\varphi \Leftrightarrow \psi}\ i\Leftrightarrow$$

eliminace

$$\frac{\varphi \quad \varphi \Leftrightarrow \psi}{\psi}\ e\Leftrightarrow_1 \qquad \frac{\varphi \Leftrightarrow \psi}{\varphi}\ e\Leftrightarrow_2$$

Verum

$$\frac{}{\top}\ i\top$$

$$\times\ e\top$$

Neform Spojka $\neg$ je „syntactic sugar":

$\neg\varphi \dashv\vdash \varphi \Rightarrow \bot$

jsou logicky ekvivalentní

$\neg\varphi \dashv\vdash \varphi \Rightarrow \bot$

$\neg\varphi \vdash \varphi \Rightarrow \bot$

1.	$\neg\varphi$	P
2.	φ	P
3.	$\bot$	$e\neg 2,1$
4.	$\varphi \Rightarrow \bot$	$i\Rightarrow, 2-3$

1.	$\varphi \Rightarrow \bot$	P
2.	φ	P
3.	$\bot$	$e\Rightarrow 2,1$
4.	$\neg\varphi$	$i\neg, 2-3$

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot} \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \bot}{\bot}$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi} \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \Rightarrow \psi}$$

$\boxed{\text{coq-book.netlify.app}}$

$\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \varphi \dashv\vdash \psi$

$\dashv\vdash$

$(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$

Důkazy na CV.

Sémantika VL

přiřazuje formulím VL význam

(vyhodnocuje pravdivost flí)

Označme $Bool = \{0, 1\}$ $\left(\begin{array}{l}0 \ldots \text{nepravda}\\ 1 \ldots \text{pravda}\end{array}\right)$

ohodnocení pravdivosti flí (pravdivostní ohodnocení)

$\mu : Fm(At) \longrightarrow Bool$

splňující jisté požadavky:

Neformálně:

1. pravdivost formule závisí na pravdivosti jejich „částí" („syntax řídí sémantika")

Př. $Fm(At) \xrightarrow{h} Bool$

víme $\begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 0 \end{cases}$

víme $a \wedge b \longmapsto 0$

2. je nutné znát pravdivost at. formulí.

$Fm(At) \longrightarrow Bool$

$a \longmapsto ?$

Př. $At = \{a, b, c\}$, $\varphi := a \vee \neg(b \wedge c)$

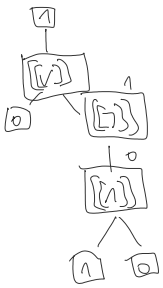
synt. strom φ

$At' \; \mu_{At} : At \longrightarrow Bool$

$a \longmapsto 0$

$b \longmapsto 1$

$c \longmapsto 0$



$\mu(\varphi) = 1$

Def Ohodnocení at. formulí je zobrazení

$\mu_{At} : At \longrightarrow Bool$

Def Význam logických spojek je dán pravd. tabulkou:

vstup 1	vstup 2	$[\![\wedge]\!]$	$[\![\vee]\!]$	$[\![\Rightarrow]\!]$	$[\![\Leftrightarrow]\!]$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

$[\![\wedge]\!] : Bool \times Bool \longrightarrow Bool$

$(1, 0) \longrightarrow 0$

unární log. spojka

vstup 1	$[\![\neg]\!]$
0	1
1	0

nulární log. spojky (konstanty)

	$[\![\top]\!]$	$[\![\bot]\!]$
nul. log. sp.		

Def: $At' \; \nu_{At} : At \longrightarrow Bool$ je ohodnocení at. flí.

Zobrazení $\mu : Fm(At) \longrightarrow Bool$ nazveme pravdivostním ohodnocením rozšiřujícím ν_{At}, pokud je zadáno rekurzivně následovně:

$\mu(a) = \mu_{At}(a)$ pro vš. $a \in At$ (μ rozšiřuje μ_{At})

pravdivostním ohodnocením rozšiřujícím [illegible]
pokud je zadáno rekurzivně následovně:

$u(a) = u_{At}(a)$ pro vš. $a \in At$ (rozšiřuje u_{At})

$u(\bot) = 0$, $u(\top) = 1$ $u(\neg\varphi) = [\![\neg]\!](u(\varphi))$

$u(\varphi \circ \psi) = [\![\circ]\!](u(\varphi), u(\psi))$ $(\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\})$

Zobrazení $v : Fm(At) \to Bool$

nazveme pravdivostním ohodnocením,
pokud rozšiřuje nějaké ohodnocení atomických formulí V_{At}

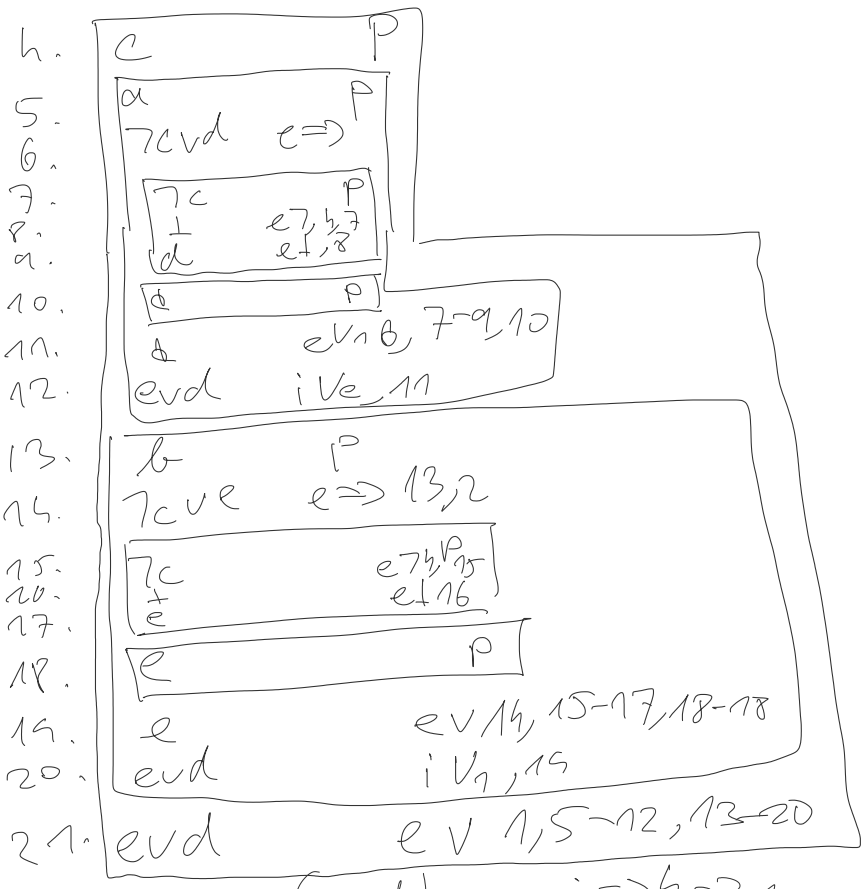
Cvičení 3

pondělí 6. března 2023 12:45

$\vdash c \Rightarrow (e \vee d)$

DCV

1. $a \vee b$
2. $b \Rightarrow (\neg c \vee e)$
3. $a \Rightarrow (\neg c \vee d)$



22 $c \Rightarrow (e \vee d)$ i⇒ 4-21

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \neg\psi}{\varphi}$$ DS – disjunktivní sylogismus

$\varphi \vee \psi, \neg\psi \vdash \varphi$

1. $\varphi \vee \psi$ P
2. $\neg\psi$ P
3. φ P

3. φ P

4. ψ P

5. $\bot$ e 2,4

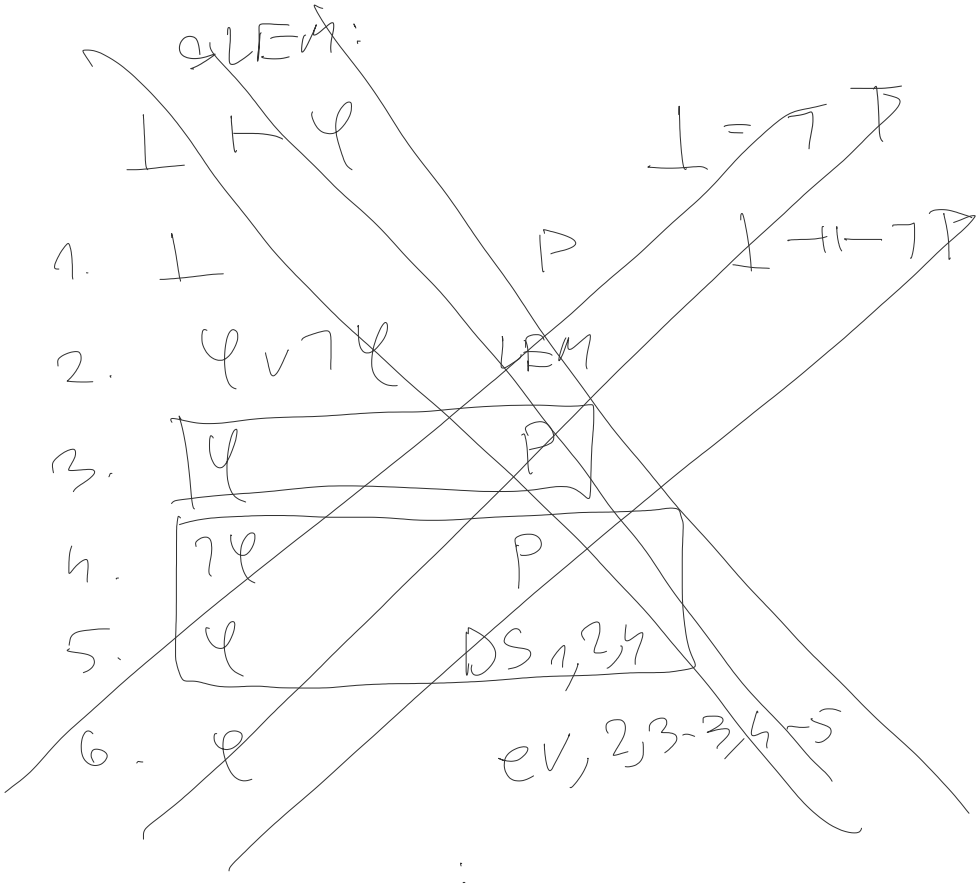
6. φ e 1 5

7. φ eV 1,3,4-6

$$\frac{\neg\varphi \vee \psi \quad \varphi}{\psi}\ DS2$$

nyní zakážeme:

a budeme používat DS1



1. $\bot$ P

2. $\varphi \vee \bot$ iV_2 1

3. | $\bot$ | P |

4. $\neg\bot$ $i\neg, 3\text{-}3$

5. φ $DS\neg, 2, 4$

$\neg p \Rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash p$

1. $\neg p \Rightarrow (q \vee r)$ P
2. $\neg q$ P
3. $\neg r$ P
4. $\neg p$ P
5. $q \vee r$ $e\Rightarrow 1, 4$
6. q P
7. $\bot$ $e\neg 6, 2$
8. p $e\bot 7$
9. r P
10. $\bot$ $e\neg 9, 3$
11. p $e\bot 10$
12. p $e\vee 5, 6\text{-}8, 9\text{-}11$
13. $\bot$ $e\neg 12, 4$
14. $\neg\neg p$ $i\neg, 4\text{-}13$
15. p $e\neg\neg 14$

$$\frac{\neg\varphi \Rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\varphi}$$

$\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$

1. $\neg(\neg p \vee \neg q)$ P
2. $\neg p$ P
3. $\neg p \vee \neg q$ $iV_1 2$

3. $\neg p \vee \neg q$ $iv_1\ 2$

4. $\bot$ $e\neg\ 3,1$

5. $\neg\neg p$ $i\neg\ 2\text{–}4$

6. p $e\neg\neg\ 5$

7. $\neg q$ p

8. $\neg p \vee \neg q$ $iv_2\ 7$

9. $\bot$ $e\neg\ 8,7$

10. $\neg\neg q$ $i\neg\ 7\text{–}9$

11. q $e\neg\neg\ 10$

12. $p \wedge q$ $i\wedge\ 6,11$

$\varphi \Leftrightarrow \psi \vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$

1. $\varphi \Leftrightarrow \psi$ p

2. φ p

ψ $e\Leftrightarrow 1,2,1$

4. $(\varphi \Rightarrow \psi)$ $i\Rightarrow\ 2,3$

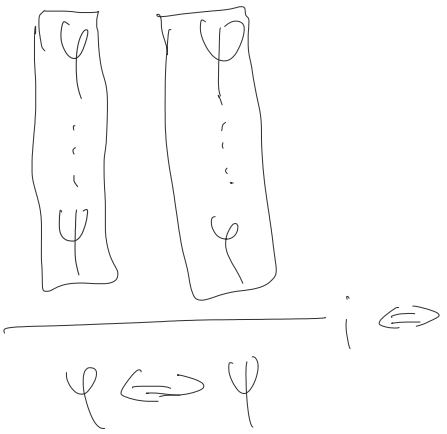
5. ψ p

6. ψ $e\Rightarrow\ 2,1,5$

7. $(\psi \Rightarrow \varphi)$ $i\Rightarrow$

8. $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$ $i\wedge\ 4,7$

$\varphi \Leftrightarrow \psi \dashv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$



DÚ $\vdash ((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a$, nejde přímo

BEZ LEM

Přednáška 5

úterý 7. března 2023 12:49

Sémantika VL

Kolik pravdivostních ohodnocení

$m: Fm(At) \longrightarrow Bool$

existuje, pokud $|At| = n$? Jejich 2^n

$m: Fm(At) \longrightarrow Bool$

$w_{At}: At \longrightarrow Bool$

$a_1 \mapsto$ 1 nebo 0 } 2 možnosti

$a_2 \mapsto$ 1 nebo 0 } 2 možnosti

$\vdots$

$a_n \mapsto$ 1 nebo 0 } 2 možnosti

} 2^n možností

Důsledek: pr. tabulka formule $\varphi \in Fm(At)$ má 2^n řádků

a	b	c	$(a \wedge b) \Rightarrow (b \vee c) =: \varphi$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$At = \{a, b, c\}$

$[\![\varphi]\!]: Bool^{At} \longrightarrow Bool$

$w_{At} \mapsto m(\varphi)$

φ je pravdivá např. v ohodnocení m, kde $m(a)=0$, $m(b)=1$, $m(c)=0$

$a=0$, $b=1$, $\varphi=0$ → nemají pravdivostní tuto hodnotu

Def: Formuli φ nazveme:

splnitelnou, pokud ex. alespoň jedno pr. ohodnocení w, ve kterém je $m(\varphi)=1$

tautologií, pokud $m(\varphi)=1$, pro všechna pravdivostní ohodnocení m

kontradikcí, pokud není pravdivá v žádném pr. dosazení

Def Množina formulí S je splnitelná, pokud ex. pr. dosazení m ve kterém jsou všechny formule $\varphi \in S$ pravdivé současně. Jinak je nesplnitelná.

$\exists m \forall \varphi : m(\varphi) = 1$

Př. $S = \{a \vee b, \neg a, \neg b\}$

a	b	$a \vee b$	$\neg a$	$\neg b$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	1	0	0

S je nesplnitelná, přitom každé $\varphi \in S$ je splnitelná zvlášť

Def. Formule φ a ψ jsou sémanticky ekvivalentní, jestliže pro každé pr. dosazení m platí $m(\varphi) = m(\psi)$

Tento fakt značíme $\varphi \models \psi$ // $[\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$

Příklad $(a \Rightarrow b) \models (\neg a \vee b)$

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg a$	$\vee$	b
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

jsou log. ekv.

$\models \subseteq Fm(At) \times Fm(At)$,

Tvrzení Vztah sémantické ekvivalence

Tvrzení Vztah sémantické ekvivalence

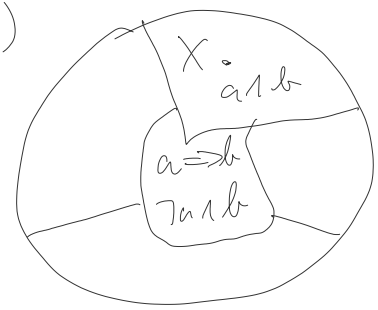
je relace ekvivalence:
Prov. formule $\alpha, \beta, \gamma \in Fm(At)$ platí:

(i) $\alpha \models \alpha$ (reflexivita)

(ii) pokud $\alpha \models \beta$, pak $\beta \models \alpha$ (symetrie)

(iii) pokud $\alpha \models \beta$ a $\beta \models \gamma$, pak $\alpha \models \gamma$ (tranzitivita)

Důkaz: DCV.



rozpadá se na třídy ekvivalence

$X = \{\varphi \in Fm(At)\}$

mn. všech synonym pro $a \wedge b$

Sémantický důsledek (vs. logický důsledek)

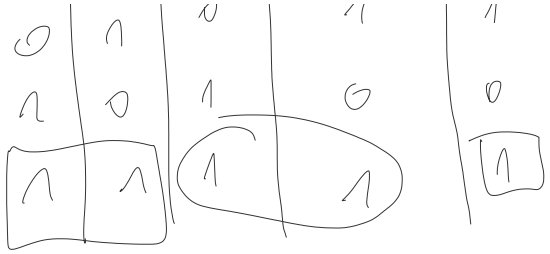
Def. Formule φ je sémantickým důsledkem množiny formulí S, pokud pro každé pr. ohodnocení w, ve kterém je pravdivá S, je pravdivá i φ.
Tento fakt značíme $S \models \varphi$.

Správně v w: $\forall \psi \in S: w(\psi) = 1$

$S := \{a, a \Rightarrow b\}$, $\varphi := b$

Pak $S \models \varphi$ $(a, a \Rightarrow b \models b)$

		S		φ
a	b	a	a ⇒ b	b
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1



Přednáška 6

pondělí 13. března 2023 11:01

Vztah logického a sémantického důsledku

Věta o korektnosti a úplnosti (přir. dedukce ve VL)

Ať $S \subseteq Fm(At)$ a $\varphi \in Fm(At)$. Pak

logický důsledek $\boxed{S \vdash \varphi}$ právě tehdy když korektnost $\boxed{S \models \varphi}$ sémantický důsledek

úplnost

Význam: Jak zjistit, zda $S \vdash \varphi$?
stačí sestrojit důkaz φ z mn. předpokladů S.

Jak zjistit, zda $S \models \varphi$? Ať $|At| = n$

Je třeba ověřit 2^n pravdiv. ohodnocení. (tabulku o 2^n řádcích)

Jak zjistit, že neplatí $S \vdash \varphi$? Musíme mít důkaz, že důkaz neexistuje.

Jak zjistit, že neplatí $S \models \varphi$?
stačí najít protipříklad $\rightarrow$ jedno pr. ohod (n) takové, že $\mu(S) = 1$, ale $\mu(\varphi) = 0$

Př. $a_1, a_1 \Rightarrow a_2, a_2 \Rightarrow a_3, a_3 \Rightarrow a_4, \dots, a_9 \Rightarrow a_{10} \models a_{10}$?

$\vdash$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	φ a_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮										⋮
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Booleovská funkce, DNF a CNF

$Bool = \{0, 1\}$, **Def.:** Booleovská funkce je jakékoliv zobrazení

$Bool^n \longrightarrow Bool$, $n \in \mathbb{N}$

vstup 1	vstup 2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

a_1	a_2	$[\![\neg a_2]\!]$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$At = \{a_1, a_2\}$

f je representována flí $\neg a_2 \in Fm(At)$

booleovská fce

1 | 1 | 0   1 | 1 | 0

booleovské fce

f dána tabulkou

Otázka: Lze každou boolovskou funkci representovat nějakou flí VL?

n	a	b	c	h	f	g	
0	0	0	0	1	0	0	$(\neg a \wedge \neg b) \wedge \neg c$
0	0	0	1	0	0	0	$\vee$
0	0	1	0	1	0	1	$(\neg a \wedge b) \wedge \neg c$
0	0	1	1	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	$\vee$
0	1	1	0	0	0	0	
0	1	1	1	1	1	0	$(a \wedge b) \wedge c$

φ je v DNF (disjunktivní normální formě)

$[a \wedge \neg a] \rightarrow$ vždy false

DNF ... disjunktivní normální forma

At ... mn. at. flí

literál ... at. fle nebo její negace

$L ::= a \mid \neg a \quad (a \in At)$

konjunkce literálů:

$K ::= L \mid K \wedge L$

formule v DNF

$D ::= K \mid D \vee K$

$At = \{a, b\}$

$((a \vee \neg b) \vee (\neg a \wedge b)) \vee (a \wedge b)$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$\bigwedge_{i=0}^{n} \varphi_i = ((\varphi_0 \wedge \varphi_1) \wedge \varphi_2) \dots) \wedge \varphi_n$$

DNF potom:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{i_m} \underbrace{l_{ij}}_{\text{literál}} \quad \ldots \varphi \text{ v DNF}$$

φ je v CNF ... $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{i_m} l_{ij}$

Úplné systémy log. spojek

DNF dokazuje, že každá bool fce $Bool^n \longrightarrow Bool$ $(n \geq 1)$ je reprezentovatelná formulí využívající pouze spojky $\wedge, \vee, \neg$

Množina $M = \{\wedge, \vee, \neg\}$, kdy tvoří ÚSS – úplný systém log. spojek.

Př: (1) $M = \{\wedge, \vee, \neg\}$ je ÚSS

(2) $N := \{\wedge, \neg\}$ je ÚSS

Neformálně: kdykoliv je ve f-li φ nebo $\psi \vee \chi$, nahradíme ji formulí $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\chi)$

// $\varphi \vee \psi \quad \longmapsto \quad \neg(\alpha \wedge \beta) \models \neg\alpha \wedge \neg\beta$

$\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \models \neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta$

$\alpha \vee \beta$

(3) Označíme jako NAND novou bin. log. spojku s význam

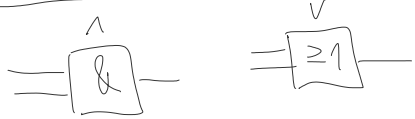
	[(NAND)]
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

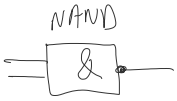
Pak $\{NAND\}$ je ÚSS

a	[(¬)]	a NAND a
0	1	1
1	0	0

NDCV:) jak zbavit $\wedge$?

nandgame.com




NAND
&

Cvičení 4

pondělí 13. března 2023 12:46

1.) Tautologie? Kontradikce? Splnitelná? $A_+ = \{a, b, c, d\}$

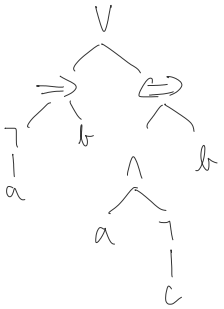
1. $\varphi := (\neg a \Rightarrow b) \vee ((a \wedge \neg c) \Leftrightarrow b)$

Postup A: vypsat celou pravdivostní tabulku φ.

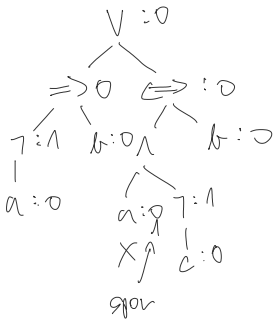
A': stačí vypsat tabulku pouze pro a, b, c

Pokud je φ splnitelná, není to kontradikce

φ je splnitelná $u(a) = 0$, $u(b) = 1$, $u(c) = 1$



aby nebyla tautologie, musí nastat:



φ je tautologie

2. $\psi := (a \Rightarrow (b \vee c)) \vee (c \Rightarrow \neg a)$

$v(a) = 0$, $v(b) = 0$, $v(c) = 0$ } Pr. ok. v je svědkem splnitelnosti

Nelze sestrojit pr. ok. w takové, aby $w(\psi) = 0$

$w(a) = 1$

$w(b) = 0$

$w(c) = 1$

ψ je tedy tautologie

3. $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee (a \wedge d) =: \chi$

χ je splnitelná

v ok. u:

$u(a) = u(b) = u(c) = u(d) = 1$

$A_+ = \{a, b, c, d\}$

Je χ tautologie?

$v(a) = 1/0$

$v(b) = 1/0$

$v(c) = 0$

$v(d) = 0$

v ohodnocení v je χ nepravdivá, χ není tautologie

Úloha 2

$S = \{\underbrace{a \Rightarrow (b \wedge c)}_{\alpha}, \underbrace{b \Rightarrow (\neg a \vee \neg c)}_{\beta}\}$.

Je S splnitelná?

ano, v pr. ok. u:

$u(a) = 0$

$u(b) = 0$

$u(c) = 1$

Pak skutečně $u(\alpha) = u(\beta) = 1$ a tedy S je splnitelná

Úloha 3 $T = \{a \vee b, c \vee b, b \Rightarrow (a \wedge b)\}$, $T \models b$?

Platí pro každé pr. ohodnocení u, pro nějž $u(T) = 1$, také $u(b) = 1$?

$u(a) = u(c) = 1$ $\boxed{u(b) = 0}$

$T \models b$ neplatí

$m(h) = m(c) = 1$ $\boxed{m(h)=0}$

TEB neplatí

4.) Nalezněte nějakou DNF reprezentující bool. fce f, g, h:

	f	g	h	h'
0 0 0	0	1	0	1
0 0 1	0	0	1	0
0 1 0	0	1	1	0
0 1 1	0	1	1	0
1 0 0	0	1	1	0
1 0 1	1	0	1	0
1 1 0	1	0	1	0
1 1 1	1	0	0	1

$\varphi := ((a \wedge \neg b) \wedge c) \vee ((a \wedge b) \wedge \neg c) \vee ((a \wedge b) \wedge c)$ (úplná DNF)

$// \; (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

$\varphi' := a \wedge \underbrace{(b \vee c)}_{II}$ je CNF

$\varphi'' := (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ je v DNF

ψ reprezentující g (v DNF): Karnaugh maps

~~$(\neg a \wedge \neg c)$~~ $\vee (\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge \neg c)$

nesr. potřeba

χ repr. h (v CNF)

χ' v DNF pro h':

$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$ .... reprezentuje h'

$\chi := \chi' = \neg((\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c))$

$\models \neg(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge c)$

$\models (\neg\neg a \vee \neg\neg b \vee \neg\neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \models (a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) =: \chi$ v CNF

Množina $\{\Rightarrow, \neg\}$ je ÚSS:

Víme: $\{\wedge, \neg\}$ je ÚSS

$\varphi \wedge \psi \models \underbrace{\varphi \wedge \neg\neg\psi}_{\text{nahradíme } \wedge \text{ kombinací } \Rightarrow \text{a } \neg} \models \neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$

NAND game

A B	OR	NAND	NOT A	NOT B	NAND NANDB	XOR AB
0 0	0	1	1	1	0	0
0 1	1	1	1	0	1	1
1 0	1	1	0	1	1	1
1 1	1	0	0	0	1	0

A×OR B

Přednáška 7

pondělí 20. března 2023 11:05

Pepa má rád Adélu. A $\qquad A, B, C \models D$

Adéla má ráda Francimora. B $\qquad \vdash$

Mít rád je tranzitivní relace. C $\qquad A_+ = \{A, B, C, D\}$

Pepa má rád Francimora. D

Př. „každý student je mladší než některý z profesorů."

Prediháty

být studentem ..... S } arity 1 (unární) $\qquad$ Kvantifikátory

být profesorem ... P } $\qquad \forall, \exists, \exists!$

být mladší než ... M } arity 2 (binární)

Pavel ..... pavel „Pavel je student" ~ S(pavel)

Jirka .... jirka „Jirka je mladší než Pavel" M(jirka, pavel)

x, y proměnné

S(x) ... „x je studentem"

P(y) ... „y je profesorem"

M(x,y) ... „x je mladší než y"

„x je mladší než některý z profesorů":

$$\exists y\,(P(y) \wedge M(x,y))$$

$$\forall x\,(S(x) \Rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge M(x,y)))$$

Jazyk PL je dvousortový

< termy .... popisují „objekty našeho zájmu"
< formule .... popisují vlastnosti daných objektů

Pred $\qquad$ Func $\qquad$ Kons

množiny predikátových / funkčních / konstantních symbolů

$Mom \in Pred$

$Mom(x,y)$ .... „x maminkou y"

$m \in Func$

$m(x)$

$m(pavel)$

termy PL

jsou zadány BNF

$t ::= x \mid c \mid f(t_1, \dots, t_n)$

x proměnná, c konst symbol, f n-ární funkční symbol

Příklad jazyka PL $\mathcal{L}$:

$ar(M) = 2$

$Pred = \{S, P, M\}$ $ar(S) = ar(P) = 1$

$Func = \{m\}$, $ar(m) = 1$

$kons = \{pavel, jirka\}$

x je term

m(y) je term

m(m(Pavel)) je term

xm ((není term

Množina formulí jazyka $\mathcal{L}$ $Fm(\mathcal{L})$

$F ::= \bot \mid \top \mid t_1 = t_2 \mid P(t_1, \dots, t_n) \mid (\neg F) \mid (F_1 \circ F_2) \mid (\forall x F) \mid (\exists x F) \mid$

x proměnná, t termy o lib kon spojka, P – n-ární pred symbol

Př. formulí v $\mathcal{L}$

$M(z,y)$ $\quad \forall x\, S(x)$

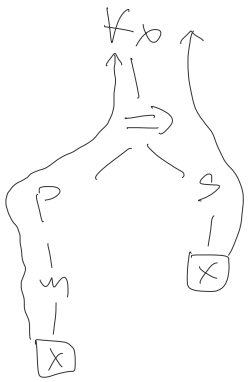
$M(x, m(x))$ $\quad \forall x (P(m(x)) \Rightarrow S(x))$

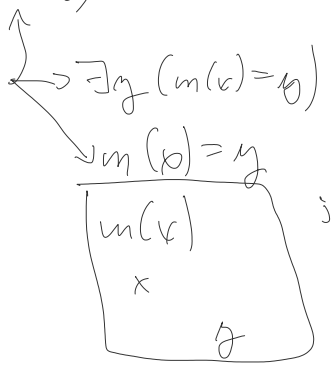
$P(m(m(pavel)))$ $\quad \forall y\, M(x,y)$

$\forall x \exists y (m(x) = y)$

$\forall x (P(m(x)) \Rightarrow S(x))$ $\quad \forall y\, M(x,y)$ $\quad \forall x \exists y (m(x) = y)$

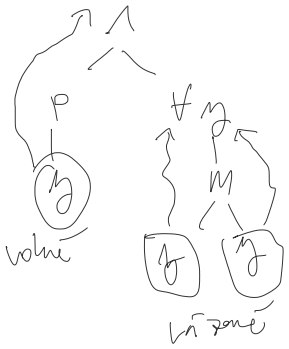
$\forall x (P(m(x)) \Rightarrow S(x))$ $\forall y\, M(x,y)$ $\forall x \exists y\, (m(x) = y)$





? Existuje χ : $y \in bound(\chi)$?
$\in free(\chi)$

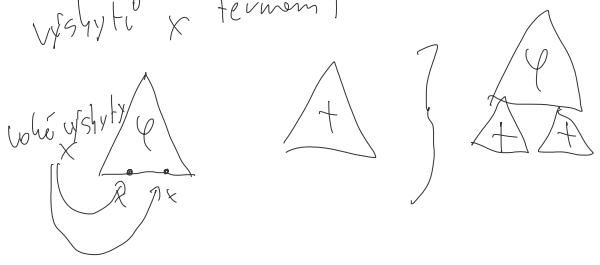
Ano:



Substituce

volné proměnné lze nahrazovat jinými termy.

Def Pro proměnnou x, term t a formuli φ definujeme $\varphi[t/x]$ jako formuli vzniklou z φ nahrazením všech volných výskytů x termem t



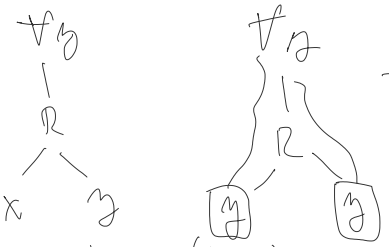
$P(x)[f(a)/x] = P(f(a))$

$R(x,y)[f(a)/x]$

$$R(x,y)[f(y)/x] = R(f(y),y)$$

$$\big(P(y) \vee \forall y\, P(y)\big)[a/y] = P(a) \vee \forall y\, P(y)$$

$$!\ \forall y\, R(x,y)[y/x] = \forall y\, R(y,y)\ !$$



→ z volné se stala vázaná problém!

```
fun print_sums(k,n)
  int sum = 0
  for i = 1...n
    sum = sum+k
    print sum
```

Cvičení 5

pondělí 20. března 2023 12:52

Ptáte se A: „Jste padouch nebo poctivec?"

B řekne: „A řekl, že je padouch." ✗

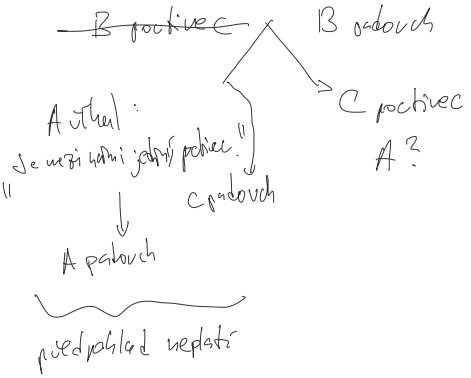
C řekne: „B lže"

A nevíme, B padouch, C poctivec

Ptáte se A: „Kolik je mezi vámi poctivců?

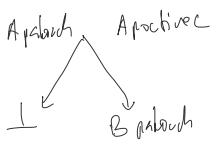
B řekne „A řekl, že je mezi námi je druhý poctivec."

C řekne: „B lže!"



A: „Alespoň 1 z nás je padouch."

B mlčí

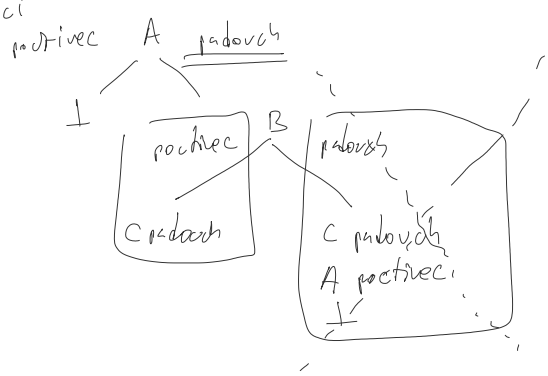


A nevíme
B padouch

A: „Všichni jsme padouši."

B: „Právě jeden z nás je poctivec"

C: mlčí



A: „Všichni jsme padouši"

B: „Právě jeden z nás je padouch."

C: Nic

A padouch

$S \models \varphi$

C: Nic

A padouch

B poctivec C poctivec	B padouch C poctivec

C poctivec

$S \models \varphi$

$S \models \neg\varphi$

1) muž padouch
žena poctivka

2) MUŽ1: „Alespoň 1 z nás je padouch."
poctivec, Muž 2 padouch

3.) ŽENA1: „$\underbrace{\text{Pokud jsem poctivá, pak je poctivá; ŽENA2.}}_{\text{implikace}}$"

Muž: „Oba jsme jednoho druhu."

Muž poctivec žena poctivka	Muž padouch žena poctivka

žena poctivka

$\exists x \exists y B(x,y)$ (iii) $\exists x \forall y B(x,y)$ (iv) $\forall x \exists y B(x,y)$ (vi) $\forall x \forall y B(x,y)$ (i) $\exists y \forall x B(x,y)$ (ii) $\forall y \exists x B(x,y)$ (v) // $B(x,y)$ „x bouchl do y"

Metrochaosu (death match) (free for all) (i) | Někdo blokoval jediný východ (ii) | To se stává (iii) | Fracek proběhl celým metrem (iv) | každý vtrpěl (v) | Přeplněné metro (vi)

Marie obdivuje všechny profesory

$\forall x \, Prof \, Obd(m,x)$

$\forall x (Prof(x) \Rightarrow Obd(m,x))$

Nějaký profesor obdivuje Marii.

~~$\exists x (Obd(Prof(x), m))$~~

Kvantifikovat lze pouze proměnná.

není term!

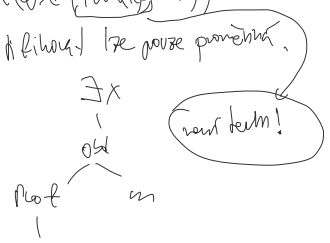
$\exists x$

Obd

Prof m

x

$\exists x (Prof(x) \wedge Obd(x,m))$



Marie se obdivuje.

$Obd(m,m)$

„Žádný student nenavštívil všechny přednášky."

$\neg \forall x (Stud(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow Nav(x,y)))$

Přednáška 8

úterý 21. března 2023 12:46

Přirozená dedukce v PL

Sentence je formule PL bez volných proměnných.

$P(x)$ není sentence, $\forall x\, P(x)$ sentence je.

Značení: $\underbrace{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi}$ ... „ψ je logickým důsledkem $\varphi_1, \dots, \varphi_n$"

(„Pro nás většina $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$ sentence")

Obecněji: $\underbrace{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash_D \psi}$ $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$ nejsou nutně sentence

D... množina proměnných

Musí platit: $free(\varphi_i) \subseteq D$

$free(\psi) \subseteq D$

Pravidla pro přir. dedukci v PL

(1) Pravidla pro log. spojky převzata z VL

(2) Pravidla pro kvantifikátory

Neformální př. každý lin. prostor má bázi.

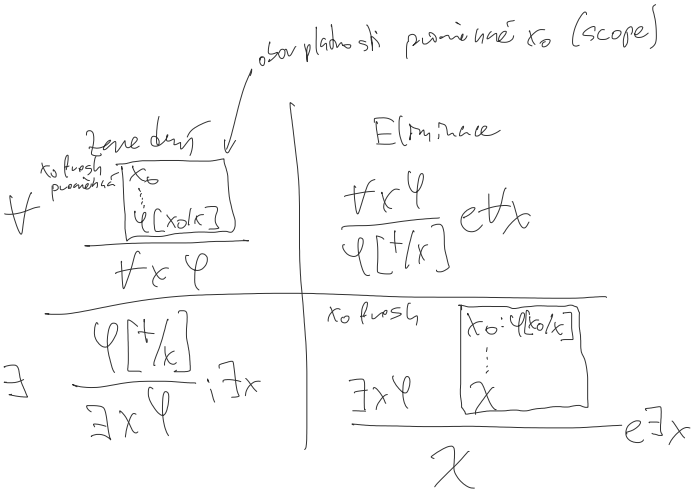
$\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ má bázi

2.13 je první číslo

existuje sudé př. číslo x

obor platnosti proměnné x_0 (scope)

	Zavedení	Eliminace
$\forall$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \vdots \\ \varphi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x\, \varphi}$ (x_0 fresh proměnná)	$\dfrac{\forall x\, \varphi}{\varphi[t/x]}\, e\forall x$
$\exists$	$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x\, \varphi}\, i\exists x$	$\dfrac{\exists x\, \varphi \quad \boxed{\begin{array}{l} x_0 : \varphi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi}\, e\exists x$ (x_0 fresh)



Př.

Pred $= \{\overbrace{\check{C}, S}^{\text{vnární}}\}$

hons $= \{S\}$

$\forall x\, (\check{C}(x) \Rightarrow S(x)),\ \check{C}(s) \vdash S(s)$

1. $\forall x\, (\check{C}(x) \Rightarrow S(x))$ P
2. $\check{C}(s)$ P
3. $\check{C}(s) \Rightarrow S(s)$ $e\forall x, 1$
4. $S(s)$ $e \Rightarrow 2,3$

Pozor! $\dfrac{\forall x\, \varphi}{\varphi[t/x]}\, e\forall x$ t musí být volný pro x ve φ

$\varphi[t/x]$ volný pro x ve φ

Př. $x, y \in D$ (deklarované)

$\varphi = \exists y\,(x<y)$. $\forall x\,\varphi = \forall x\,\exists y\,(x<y)$.

Ale: $\varphi[y/x] = \exists x\,(y<y)$.

Nechť $\mathcal{T}$ je trojúhelník.

⋮

$\varphi(\mathcal{T})$ Součet délek dvou různých stran $\mathcal{T}$ je větší než délka třetí strany

rámeček (box)

šablona důkazu

Př. $(i\forall)$ $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x\,P(x) \vdash \forall x\,Q(x)$

1.	$\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall x\,P(x)$	P
3.	x_0	D ← deklarace
4.	$P(x_0)$	$e\forall x, 2$
5.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
6.	$Q(x_0)$	$e\Rightarrow 4,5$
7.	$\forall x\,Q(x)$	$i\forall x\ 3-6$

Př. $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)), \exists y\,P(y) \vdash \exists z\,Q(z)$

1.	$\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\exists y\,P(y)$	P
3.	$y_0 : P(y_0)$	W ← svědek (witness)
4.	$P(y_0) \Rightarrow Q(y_0)$	$e\forall x, 1$
5.	$Q(y_0)$	$e\Rightarrow 3,4$
6.	$\exists z\,Q(z)$	$i\exists z, 5$
7.	$\exists z\,Q(z)$	$e\exists y, 2, 3-6$

5. $Q(y_0)$

6. $Q(y_0)$

špatně!

$\exists x P(x), \forall y \forall z (P(y) \Rightarrow Q(z)) \vdash \forall n Q(n)$

1. $\exists x P(x)$ P
2. $\forall y \forall z (P(y) \Rightarrow Q(z))$ P
3. n_0 D
4. $x_0 : P(x_0)$ W
5. $\forall z (P(x_0) \Rightarrow Q(z))$ e$\forall$ y 2
6. $P(x_0) \Rightarrow Q(n_0)$ e$\forall$ z 5
7. $Q(n_0)$ e$\Rightarrow$ 4,6
8. $Q(n_0)$ e$\exists$ x, 1, 4–7
9. $\forall n Q(n)$ i$\forall$ n, 3–8

Dehlavocné proměnné

$Pred = \{S\}, ar(S) = 1$

$Func = \{\cdot\}, ar(\cdot) = 2$, infixem

$Cons = \{z\}$

$x \subset y$
$\subset(x, y)$

$D \subseteq Var$

$D := \{x, y\}$

term v dehl. proměnných

$x \cdot (x \cdot y), 2 \cdot x$

dehlavocné proměnné

$z \in Var, z \notin D$

Př. $x, x \cdot y, y \cdot x, x \cdot (x \cdot 0), 2 \cdot x, \dots$

Např. $x \cdot z, 2 \cdot z,$

Konvence (2.) Substituci $\varphi[t/x]$
v důkazech používáme pouze proměnné + využíváme dehlavocné proměnné.

Př.

$Pred = \{B\}$ $ar(B) = 1$

$Func = Cons = \emptyset$

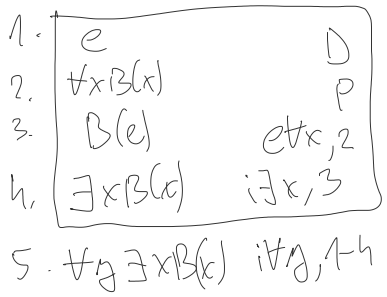
redundantní jsme

$\forall x B(x) \vdash \exists x B(x)$

1. $\forall x B(x)$ P
2. $B(y)$ e$\forall$ x, 1
3. $\exists x B(x)$ i$\exists$ 2

co je φ?

$\forall x B(x) \vdash_D \exists x B(x)$ $D = \{e\}$



Přednáška 9

pondělí 27. března 2023 11:04

Rovnost

$t_1 = t_2$

Zavedení

$$\frac{}{t = t \text{ (refl.)}} \; i=$$

Eliminace

$$\frac{t_1 = t_2 \quad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]} \; e=$$

Př: $\forall x S(2 \cdot x), \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x) \vdash \forall z S(z \cdot 2)$

1. $\forall x S(2 \cdot x)$
2. $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$
3. z_0 D
4. $S(2 \cdot z_0)$ $e \forall x, 1$
5. $\forall y (2 \cdot y = y \cdot 2)$ $e \forall x, 2$
6. $2 \cdot z_0 = z_0 \cdot 2$ $e \forall y, 5$
7. $S(z_0 \cdot 2)$ $e = 6, 4$
8. $\forall z (z_0 \cdot 2)$ $i \forall z, 3-7$

1. $t_1 = t_2$
2. $\underbrace{t_1 = t_1}$ $i=$
3. $t_2 = t_1$ $e=$

$$\frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1} \text{ (sym)}$$

$$\frac{t_1 = t_2 \quad t_2 = t_3}{t_1 = t_3} \text{ (trans)}$$

Tvrzení s kvantifikátory a negací

$\neg \forall x \, P(x) \dashv\vdash \exists x \neg P(x)$

$\neg \exists x \, P(x) \dashv\vdash \forall x \neg P(x)$

Příp. $\vdash$ (log. ekvivalence)

$\varphi \dashv\vdash \psi$ $\varphi \vdash \psi$ a $\psi \vdash \varphi$

$\neg\exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

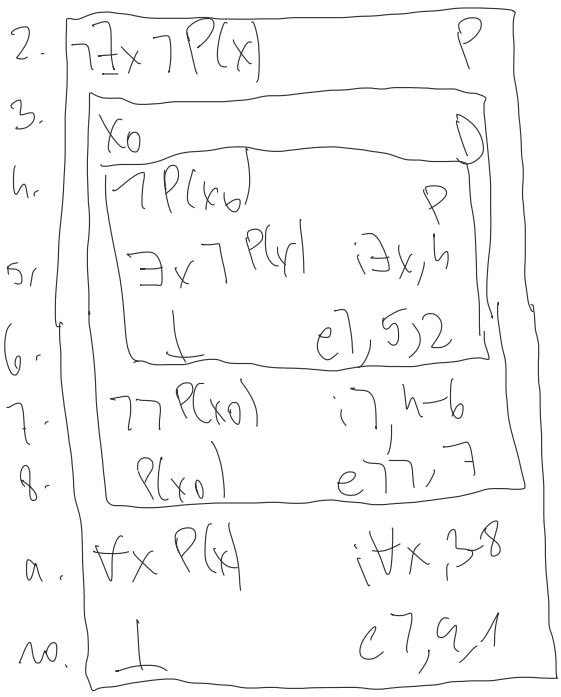
1. $\neg\exists x P(x)$
2. x_0 D
3. $P(x_0)$ P
4. $\exists x P(x)$ i$\exists$x,3
5. $\bot$ e$\neg$4,1
6. $\neg P(x_0)$ i$\neg$3-5
7. $\forall x \neg P(x)$ i$\forall$x,2-6

$\forall x \neg P(x) \vdash \neg\exists x P(x)$

1. $\forall x \neg P(x)$ P
2. $\exists x P(x)$ P
3. $x_0 : P(x_0)$ W
4. $\neg P(x_0)$ e$\forall$x,1
5. $\bot$ e$\neg$3,4
6. $\bot$ e$\exists$x2,3-5
7. $\neg\exists x P(x)$ i$\neg$,2-6

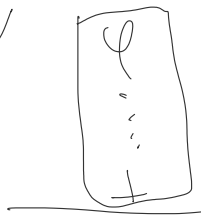
$\neg\forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$

1. $\neg\forall x P(x)$ P



$\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$

WDCV



$\neg\varphi$ i¬

"Existuje právě jedno" $\exists! x \varphi$

$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow y = x))$

$\exists x P(x) \wedge \forall y \forall z ((P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z)$

Tyto formalizace jsou log. ekvivalentní (cvičení)

$\exists l : \mathbb{R}\ \forall \varepsilon : \mathbb{R}\ \exists n_0 : \mathbb{N}\ \forall n : \mathbb{N}$

Jak přidat "+xPy" ?

Jak přidat „+xPy“ ?

N, R unární pred. symboly

↕

přir. & reál. čísla

„existuje R s vl. A“

$\exists v\,(R(v) \wedge A(v))$

$\forall v\,(R(v) \Rightarrow A(v))$

„všechna R mají vl. A“

$\neg \forall x\,(A(x) \Rightarrow B(x)) \dashv\vdash \exists x\,(A(x) \wedge \neg B(x))$

$\neg \exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \dashv\vdash \forall x\,(A(x) \Rightarrow \neg B(x))$

(cvičení)

$\forall z\,(P(z) \wedge Q(z)) \vdash \forall y\,P(y) \wedge \forall z\,Q(z)$

1. $\forall z(P(z) \wedge Q(z))$ P
2. | z_0 D
3. | $P(z_0) \wedge Q(z_0)$ $e\forall z, 1$
4. | $Q(z_0)$ $e\wedge 2, 3$
5. $\forall z\,Q(z)$ $i\forall z\ 2\text{-}4$
6. | y_0 D
7. | $P(y_0) \wedge Q(y_0)$ $e\forall z, 1$
8. | $P(y_0)$ $e\wedge 1, 7$
9. $\forall y\,P(y)$ $i\forall\ 6\text{-}8$
10. $\forall y\,P(y) \wedge \forall z\,Q(z)$ $i\wedge 9, 5$

$\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x\,\neg Q(x) \vdash \forall x\,\neg P(x)$

1. $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$ P
2. $\forall x\,\neg Q(x)$ P
3. | x_0 D
4. | $P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$ $e\forall x, 1$
5. | $\neg Q(x_0)$ $e\forall x, 2$
6. | | $P(x_0)$ P
7. | | $Q(x_0)$ $e\Rightarrow 6, 4$
8. | | $\bot$ $e\neg 5, 7$
9. | $\neg P(x_0)$ $i\neg\ 6\text{-}8$
10. $\forall x\,\neg P(x)$ $i\forall\ 3\text{-}9$

$\forall x\,P(x) \vee \forall y\,Q(y) \vdash \forall z\,(P(z) \vee Q(z))$

1. $\forall x\,P(x) \vee \forall y\,Q(y)$ P
2. | z_0 D
3. | | $\forall x P(x)$ P
4. | | $P(z_0)$ $e\forall x, 3$
5. | | $P(z_0) \vee Q(z_0)$ $i\vee 1, 4$
6. | | $\forall y\,Q(y)$ P
7. | | $Q(z_0)$ $e\forall y, 6$
8. | | $P(z_0) \vee Q(z_0)$ $i\vee 2\ 7$
9. | $P(z_0) \vee Q(z_0)$ $e\vee 1\ 3\text{-}5, 6\text{-}8$
10. $\forall z\,(P(z) \vee Q(z))$ $i\forall\ 2\text{-}9$

$\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x\,(Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \forall x\,(P(x) \Rightarrow R(x))$

1. $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$ P
2. $\forall x\,(Q(x) \Rightarrow R(x))$ P
3. | x_0 D
4. | $P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$ $e\forall x, 1$
5. | $Q(x_0) \Rightarrow R(x_0)$ $e\forall x, 2$
6. | | $P(x_0)$ P
7. | | $Q(x_0)$ $e\Rightarrow 6, 4$
8. | | $R(x_0)$ $e\Rightarrow 7, 5$
9. | $P(x_0) \Rightarrow R(x_0)$ $i\Rightarrow\ 6\text{-}8$
10. $\forall x\,(P(x_0) \Rightarrow R(x_0))$ $i\forall x, 3\text{-}9$

$\forall x \forall y\,R(x,y) \vdash \forall x\,R(x,x)$

1. $\forall x \forall y\,R(x,y)$ P
2. | x_0 D
3. | $\forall y R(x_0, y)$ $e\forall x, 1$
4. | $R(x_0, x_0)$ $e\forall y, 3$
5. $\forall x R(x,x)$ $i\forall x\ 2\text{-}4$

$\exists x(P(x) \wedge Q(b)) \vdash \exists y\,P(y) \vee \exists z\,Q(z)$

1. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x))$ P
2. $x_0 : P(x_0) \vee Q(x_0)$ W
3. | $P(x_0)$ P
4. | $\exists y P(y)$ $i\exists y, 3$
5. | $\exists y P(y) \vee \exists z\,Q(z)$ $i\vee_1, 4$
6. | $Q(x_0)$ P
7. | $\exists z P(z)$ $i\exists z, 6$
8. | $\exists y P(y) \vee \exists z P(z)$ $i\vee_2, 7$
9. $\exists y P(y) \vee \exists z P(z)$ $e\vee 2, 3\text{-}5, 6\text{-}8$

$P(a), \neg P(b) \vdash \neg(a = b)$ // $a \neq b$

1. $P(a)$ P
2. $\neg P(b)$ P
3. | $a = b$ P
4. | $P(b)$ $e= 3, 1$
5. | $\bot$ $e\neg 4, 2$
6. $\neg(a = b)$ $i\neg\ 3\text{-}5$

1. $\exists x(P(x) \wedge Q(b))$ $\exists y P(y) \wedge \exists z\,Q(z)$
2. | $x_0 : P(x_0) \wedge Q(x_0)$ W
3. | $P(x_0)$ $e\wedge 1, 2$
4. | $Q(x_0)$ $e\wedge 2, 2$
5. | $\exists y P(y)$ $i\exists\ 3, 3$
6. | $\exists z\,Q(z)$ $i\exists\ 4, 4$
7. | $\exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)$ $i\wedge 5, 6$
8. $\exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)$ $e\exists x, 1, 2\text{-}7$

$\exists y P(y) \vee \exists z P(z)$ iV2,1

$\exists y P(y) \vee \exists z P(z)$ eV2,3-5,6-8

$\exists y P(y) \vee \exists z P(z)$ e$\exists$x 1,2-9 □

Nějaký A je B:

$\neg\exists x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x(A(x) \Rightarrow \neg B(x))$

1. $\neg\exists x(A(x) \wedge B(x))$ P
2. x_0 D
3. $A(x_0)$ P
4. $B(x_0)$ P
5. $A(x_0) \wedge B(x_0)$ i1,3,4
6. $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ i$\exists$x 3,5
7. $\perp$ e⊥ 1,6
8. $\neg B(x_0)$ i¬ 4-7
9. $A(x_0) \Rightarrow \neg B(x_0)$ i⇒ 3-8
10. $\forall x\, A(x) \Rightarrow \neg B(x)$

DCV $\forall x(\exists y(M(x,y) \vee M(y,x)) \Rightarrow M(x,x)),\ \exists x \exists y M(x,y) \vdash \exists x M(x,x)$

1. $\forall x(\exists y(M(x,y) \vee M(y,x)) \Rightarrow M(x,x))$ P
2. $\exists x \exists y M(x,y)$ P
3. $x_0 : \exists y M(x_0,y)$ W
4. $\exists y(M(x_0,y) \vee M(y,x_0)) \Rightarrow M(x_0,x_0)$ e∀x,1
5. $y_0 : M(x_0,y_0)$ W
6. $M(x_0,y_0) \vee M(y_0,x_0)$ iV1,5
7. $\exists y(M(x_0,y) \vee M(y,x_0))$ i$\exists$y
8. $\exists y(M(x_0,y) \vee M(y,x_0))$ e$\exists$ 5-7,3
9. $M(x_0,x_0)$ e⇒ 8,4
10. $\exists x M(x,x)$ i$\exists$x 9
11. $\exists x M(x,x)$ e$\exists$x 3-10,2

Přednáška 10

pondělí 3. dubna 2023 11:04

Sémantika PL

Ať $\mathcal{L}$ je jazyk PL

Interpretace $\mathcal{I}$ jazyku $\mathcal{L}$ sestává z:

1. Množiny U (tzv. universum)
2. přiřazení $[\![\dots]\!]$, které
   (a) konst. symbolu a přiřadí $[\![a]\!] \in U$
   (b) symbolu $f \in Func$ arity n přiřadí $[\![f]\!] : U^n \longrightarrow U$

   Kons, Func, Pred
   (c) symbolu $P \in Pred$ (arity n) přiřadí množinu $[\![P]\!] \subseteq U^n$

   $n=0$: $[\![P]\!]$ buď 0 nebo 1

Př. $\mathcal{L}$: $Pred = \{S, M\}$ $ar(S)=1$ $ar(M)=2$

$Func = \{f\}$, $ar(f)=2$, $Kons\{a\}$

$\mathcal{I}$: $U := \mathbb{N}$, $[\![a]\!] = 2$, $[\![f]\!] : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(m,n) \longmapsto m+n$

$[\![S]\!] \subseteq U$ $[\![S]\!] \subseteq \mathbb{N}$

$= \{2\cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$ // sudá čísla

$[\![M]\!] \subseteq U \times U$ $[\![M]\!] = \{(m,n) \in U\times U \mid m < n\}$

// být menší než

Jak interpretovat termy v interpretaci?

Def. Pro interpretaci $\mathcal{I} = (U, [\![\dots]\!])$ je

kontext proměnných ξ parciální zobrazení

Kontext proměnných ρ parciální zobrazení

$\rho : Var \longrightarrow U$ // zobrazení $D \to U$, kde $D \subseteq Var$.

"deklar. proměnné" & def.

<u>Def.</u> ρ kontext proměnných, $x \in Var$, $d \in U$:
update ρ o hodnotu d v proměnné x je $\rho[x := d] : Var \longrightarrow U$

$$y = x \Rightarrow y \longmapsto \rho(y) \text{ (pokud } \rho(y) \text{ definováno)}$$
$$x \longmapsto d$$

Jak interpretovat termy v implementaci?

Pro $\mathcal{I} = (U, [\![\,]\!])$ a kontext proměnných ρ

a term t ..... je $[\![t]\!]_\rho \in U$

definován induktivně:

$$[\![a]\!]_\rho = [\![a]\!], \qquad [\![x]\!]_\rho = \rho(x),$$

$$[\![f(t_1, \dots, t_n)]\!]_\rho = [\![f]\!]([\![t_1]\!]_\rho, \dots, [\![t_n]\!]_\rho)$$

<u>Př.</u> $D = \{x, y\}$

$\rho : D \to U$
$x \mapsto 2$
$y \mapsto 4$

$$[\![f(a, y)]\!]_\rho = [\![f]\!]([\![a]\!], [\![y]\!]) = 2 + \rho(y) = 2 + 4 = 6$$

$\rho[x := 3] : D \to U$
$x \mapsto 3$
$y \mapsto 4$

$[\![f(a, z)]\!]_\rho$ nedává smysl

$\rho[z := 3]$ $D \cup \{z\} \to U$
$\dots \longmapsto$ $\longrightarrow$ h) neupdatuje globálně

$\rho[z:=3]\ D \cup \{z\} \to U$

$x \mapsto 2$!

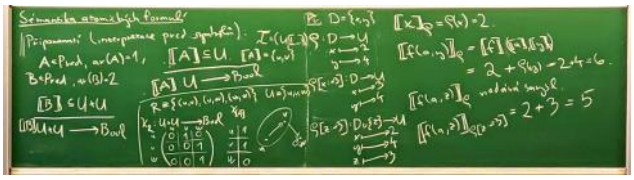
$y \mapsto 4$

$z \mapsto 3$

$\longrightarrow$ h) neexplikuje globálně

$[\![f(a,z)]\!]_{\rho[z:=3]} = 2+3=5$

Sémantika



$\mathcal{I} = (U, [\![\_]\!])$ ρ kont. prom. $free(\varphi) \subseteq D$

at. formule φ je pravdivá v interpretaci $\mathcal{I}$ & kontextu ρ

$\mathcal{I} \models_\rho \varphi$, příp. $[\![\varphi]\!]_\rho$

$[\![P(t_1, \dots, t_n)]\!]_\rho = [\![P]\!]([\![t_1]\!]_\rho, \dots, [\![t_n]\!]_\rho)$

$[\![t_1 = t_2]\!]_\rho = 1$ právě tehdy, když $[\![t_1]\!]_\rho = [\![t_2]\!]_\rho$

$\mathcal{I} \models_\rho M(y, f(a,y))$?

$[\![M(y, f(a,y))]\!]_\rho = [\![M]\!](4, 2+4)$

$\quad = 1$, neb $4 < 6$

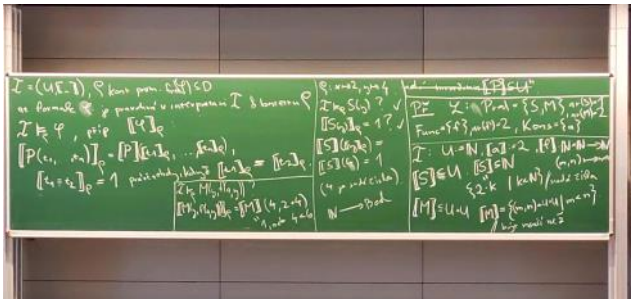
Pravdivost složitých fl (obs. log. spojky) funguje jako ve VL:

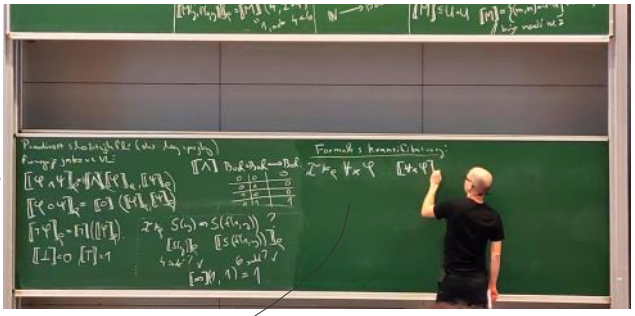
$[\![\varphi \wedge \psi]\!]_\rho = [\![\wedge]\!]([\![\varphi]\!]_\rho, [\![\psi]\!]_\rho)$

$[\![\varphi \circ \psi]\!]_\rho = [\![\circ]\!]([\![\varphi]\!]_\rho, [\![\psi]\!]_\rho)$

$[\![\neg \varphi]\!]_\rho = [\![\neg]\!]([\![\varphi]\!])_\rho$

$[\![\bot]\!] = 0$, $[\![\top]\!] = 1$





Formule s kvantifikátory:

$\mathcal{I} \models_\xi \forall x \varphi$: $[\![\forall x \varphi]\!]_\xi = 1$ právě tehdy když

$[\![\varphi]\!]_{\xi[x:=d]} = 1$ pro všechny objekty kontextu ξ v proměnné x

$\mathcal{I} \models_\xi \exists x \varphi \iff [\![\exists x \varphi]\!]_\xi = 1$ právě tehdy když

$[\![\varphi]\!]_{\xi[x:=d]} = 1$ pro nějaký objekt kontextu ξ v prom. x

Cvičení 7

pondělí 3. dubna 2023 12:47

$\varphi_1: \forall x (Pes(x) \Rightarrow Vyje(x))$

$\varphi_2: \forall x (\exists y (kocka(y) \wedge Ma(x,y)) \Rightarrow \neg \exists z (Mys(z) \wedge Ma(x,z)))$

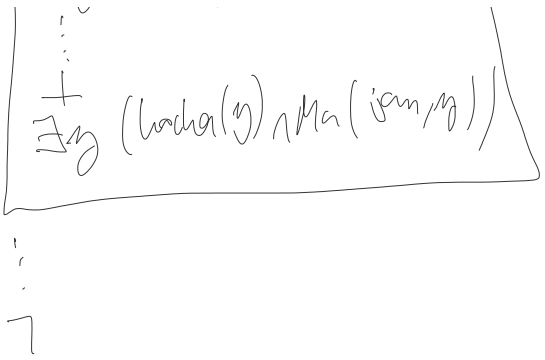
$\varphi_3: \forall x (PSS(x) \Rightarrow \neg \exists y (Ma(x,y) \wedge Vyje(y)))$

$\varphi_4: \exists x (Ma(jan,x) \wedge (kocka(x) \vee Pes(x)))$

$\varphi_5: PSS(jan) \Rightarrow \neg \exists z (Mys(z) \wedge Ma(jan,z))$

DK: $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \vdash \varphi_5$:

1. $\forall x (Pes(x) \Rightarrow Vyje(x))$
2. $\forall x (\exists y (kocka(y) \wedge Ma(x,y)) \Rightarrow \neg \exists z (Mys(z) \wedge Ma(x,z))$
3. $\forall x (PSS(x) \Rightarrow \neg \exists y (Ma(x,y) \wedge Vyje(y)))$
4. $\exists x (Ma(jan,x) \wedge (kocka(x) \vee Pes(x)))$
5. $PSS(jan)$ P
6. $PSS(jan) \Rightarrow \exists y (Ma(jan,y) \wedge Vyje(y))$ e $\forall x$ 3
7. $\neg \exists y (Ma(jan,y) \wedge Vyje(y))$ e $\Rightarrow$
8. K: $Ma(jan,h) \wedge (kocka(h) \vee Pes(h))$ e
9. $Ma(jan,h)$
10. $kocka(h) \vee Pes(h)$
11. $kocka(h)$ P
12. $\exists y (kocka(y) \wedge Ma(jan,y))$
13. $Pes(h)$ P
14. $Vyje(h)$
15. $Ma(jan,h)$



$$\boxed{\begin{array}{l} \vdots \\ \exists y\,(\text{kocha}(y) \wedge \text{Ma}(\text{jen}, y)) \end{array}}$$

$\vdots$

$\neg$

každý $\underbrace{\text{člověk}}_{\check{C}}$ $\underbrace{\text{má právo smrt}}_{MPS}$ cokoli, co je $\underbrace{\text{hloupější}}_{H}$ než nějaký $\underbrace{\text{repr.}}_{V}$

$$\forall x\,(\check{C}(x) \Rightarrow (\forall y\,(\varphi(y) \Rightarrow MPS(x,y))))$$

Pašík ... konst symbol p $\quad$ y je hloupější než repr z

$$\varphi(y) := \underbrace{\exists z\,(\overbrace{V(z) \wedge H(y,z)})}_{y \text{ je hloupější než nějaký repr.}}$$

$$\forall y\,(N(y) \Rightarrow H(y,p)) \wedge V(p)$$

$$\forall x\,(\check{C}(x) \Rightarrow \forall y\,(N(y) \Rightarrow MPS(x,y)))$$

Přednáška 11

úterý 4. dubna 2023 12:37

$\mathcal{Q}$: Pred = $\{S, M\}$

$ar(S) = 1, ar(M) = 2$

Func = $\{f\}$, $ar(f) = 2$

Cons = $\{a\}$

$\mathcal{I} = (U, [\![\_]\!])$, kde $U = \mathbb{N}$

$[\![a]\!] = 2$, $[\![S]\!] = \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$,

$[\![M]\!] = \{(m,n) \mid m < n\}$, $[\![f]\!] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$

$(m,n) \longmapsto m+n$

Připomenutí: sémantika kvantifikátorů

$\mathcal{I} = (U, [\![\_]\!]_{\_})$, β kontext proměnných

$[\![\forall x \varphi]\!]_\beta = 1$ ... $[\![\varphi]\!]_{\beta[x:=d]} = 1$ [pro čí. updaty $\beta[x:=d]$ kontextu β

$[\![\exists x \varphi]\!]_\beta = 1$ ... $[\![\varphi]\!]_{\beta[x:=d]} = 1$ pro nějaké $d \in U$

Př. $\sigma : \{x, y\} \longrightarrow \mathbb{N}$

$x \longmapsto 4$

$\mathcal{I} \models_\sigma \forall x M(x, f(a,y))$?

$[\![\forall x (M(x, f(a,y)))]\!]_\sigma = 1$?

$= 1$?

$[\![\varphi]\!]_{\sigma[x:=0]} = [\![M(x, f(a,y))]\!]_{\sigma[x:=0]}$

$0 < [\![f(a,y)]\!]_{\sigma[x:=0]}$

$0 < 2 + 4$? ✓

$\sigma[x:=0]$

$0 < 2+4$? ✓

$[\![\psi]\!]_{\sigma[x:=1]} = [\![M(x, f(a,b))]\!]_{\sigma[x:=1]} = 1$?

$1 < 2+4$? ✓

$[\![\psi]\!]_{\sigma[x:=26]} = ?$ $26 < 2+4$? ✗

obecně kvantifikovaná formule musí pravdivá.

$\mathcal{I} \models_\sigma \exists x\, M(x, f(a,y))$? ✓

$\gamma : x \to 1$ $\mathcal{I} \models_\gamma S(x) \vee \exists x\, M(a,x)$?

$\mathcal{I} \models_\gamma S(x)$? ✗

$[\![S(x)]\!]_\gamma = [\![S]\!]([\![x]\!]_\gamma) = [\![S]\!](1) = 0$

$\mathcal{I} \models_\gamma \exists x\, M(a,x)$

~~2 ∈ A ?~~ ✗

$[\![\exists x\, M(a,x)]\!]_\gamma = 1$

pokud ex. update γ', $\gamma'[x:=d]$ $d \in \mathbb{N}$

tak, že $[\![M(a,x)]\!]_{\gamma[x:=d]} = 1$

$2 < d$? Např. $d := 3$

Řekneme, že sentence φ je pravdivá v interpr. $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$), pokud platí $\mathcal{I} \models_\varepsilon \varphi$ kde ε je prázdný kontext $D \xrightarrow{\varepsilon} U$.

$D \neq \emptyset$

$\mathcal{I} \models \forall x \exists y M(x,y)$? sentence

je...

$\mathcal{I} \models \forall x \exists y M(x,y)$? — sentence

Pro každý kontext $x \mapsto d$ musí ex. update $(x\ y)$ tak, aby $[\![M(x,y)]\!]_{\substack{x\to d \\ y\to e}} = 1$

$y \longmapsto e$
$y \longmapsto d+1$
$d < d+1$ ✓

je pravdivá

$\mathcal{I} \models \exists y \forall x\ M(x,y)$?

Ex. kontext proměnných ξ $y \longmapsto d$ tak, aby pro ξ

update ξ $x \longmapsto e$ $[\![M(x,y)]\!]_{\substack{y=d \\ x=e}} = 1$

$e < d$? Ne

$d+1$

$d+1 < d$? Ne

Vyřešte soustavu

$x + y + 0z = 2$ $\quad 0 \cdot z = 0$

$y + 0z = 1$

$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{I} \models \varphi$ ... sentence φ je pravdivá v interpretaci $\mathcal{I}$

$\mathcal{I}$ je modelem φ

Def: Sentence φ je

1) splnitelná, pokud má nějaký model,
2) tautologie, pokud je každá interpretace jejím modelem
3) kontradikce, pokud nemá žádný model

Příklad $\varphi = \forall x\ M(x, f(a,x))$ je splnitelná.

(je pravdivá v naší implementaci $\mathcal{I}$)

(je pravdivá v naší implementaci $\mathcal{I}$)

φ není tautologie

$\mathcal{K} = (U, [\![\_]\!])$ $U = \{0,1\}$ $[\![M]\!] = \{(0,1)\}$,

$[\![a]\!] = 1$

$[\![f]\!] = U \times U \to U$

$(m,n) \to \max(m,n)$

$[\![S]\!] = \emptyset$

$\mathcal{K} \models_\varepsilon \forall x\, M(x, f(a,x))$? ✗

$\mathcal{K} \models_{x:=0} M(x, f(a,x))$? $[\![M(x, f(a,x))]\!]^{x:=0} = 1$? ✓

$(0,1) \in [\![M]\!]$? ✓

$\mathcal{K} \models_{x:=1} M(x, f(a,x))$?

$\to (1,1) \in [\![M]\!]$ ✗

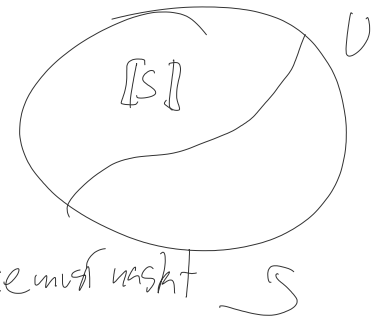
Př. tautologie: $Pred = \{S\}$ $ar(S) = 1$, $konst = Func = \emptyset$

$\forall x (S(x) \vee \neg S(x))$ je tautologie

Uvažujme interpretaci $\mathcal{M} = (U, [\![S]\!])$.

U neprázdná $\to$ $U \neq \emptyset$ $\mathcal{M} \models_\varepsilon \forall x (S(x) \vee \neg S(x))$?

$\mathcal{M} \models_{x:=u} S(x) \vee \neg S(x)$ pro vš. $u \in U$?



U prázdná

$[\![S(x)]\!]_{x:=u} = 1$ iff $u \in [\![S]\!]$

$= 0$ iff $u \notin [\![S]\!]$

1 situace musí nastat

$U = \emptyset$, potom

$\mathcal{M} \models_\varepsilon \forall x (S(x) \vee \neg S(x))$?

$\mathcal{M} \models S(x) \vee \neg S(x)$? ✓

$\mathcal{M} \models_{x:=u} S(b) \vee \neg S(x)$?✓

pro vš. updaty $x:=u$ → tj. pro žádný update

Def.: Množina sentencí S je splnitelná, pokud ex. interpretace $\mathcal{I}$, která je modelem všech $\varphi \in S$ (tzn. jestliže má model)

S je nesplnitelná, jestliže nemá model.

Př. ① $S = \emptyset$ je splnitelná

Př. ② $T = \{\exists x S(x), \exists x \neg S(x)\}$ je splnitelná

Modelem je například interpretace $\mathcal{I}$

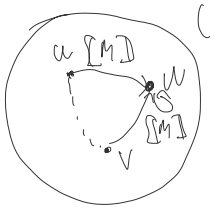
Př. ③ $K = \{\exists x \neg S(x), \forall x S(b)\}$ je nesplnitelná

Def.: Sentence φ je sémantickým důsledkem množiny sentencí S, pokud je každý model množiny S i modelem sentence φ.

Značíme $S \models \varphi$ // Určitě $\psi \models \varphi$, pokud $S = \{\psi\}$, nebo $\models \varphi$, pokud $S = \emptyset$

Př. $\exists y \forall x M(x,y) \models \forall x \exists y M(x,y)$

Ať $\mathcal{M}$ je modelem ψ. $\mathcal{M} \models \varphi$?✓



$\forall x \exists y M(x,y) \models \exists y \forall x M(x,y)$?

φ $\quad$ ψ

Neplatí: $\mathcal{I} \models \varphi$, ale $\mathcal{I} \not\models \psi$

Přednáška 12

neděle 16. dubna 2023 21:18

Sémantická ekvivalence

Def. Sentence φ a ψ nazveme sémanticky ekvivalentní, pokud mají stejné modely – pro každou interpretaci $\mathfrak{I}$ platí $\mathfrak{I} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathfrak{I} \models \psi$. Značíme $\varphi \models\models \psi$

Př. $\neg\forall x \varphi \models\models \exists x \neg\varphi$ $\quad$ $\forall x \forall y \varphi \models\models \forall y \forall x \varphi$

$\neg\exists x \varphi \models\models \forall x \neg\varphi$ $\quad$ $\exists x \exists y \varphi \models\models \exists y \exists x \varphi$

$\forall x \varphi$

$\forall x \varphi \wedge \forall x \psi \models\models \forall x (\varphi \wedge \psi)$

$\exists x \varphi \vee \exists x \psi \models\models \exists x (\varphi \vee \psi)$

Př. $\forall x \varphi \vee \forall x \psi \models \forall x (\varphi \vee \psi)$

$\not\Leftarrow$ ← nejsou sém. ekviv. ale jedna je sém. dísl.

$\exists x \varphi \wedge \exists x \psi \not\Rightarrow \exists x (\varphi \wedge \psi)$

$\varphi \models\models \psi$ iff. $\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$

Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk PL, S množina sentencí jazyka $\mathcal{L}$.
φ sentence

Pak platí

$S \vdash \varphi$ právě tehdy, když $S \vdash \varphi$

$S \models \varphi$ právě tehdy, když $S \vdash \varphi$

věta o úplnosti (a bezespornosti) — varianta $\models \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi$

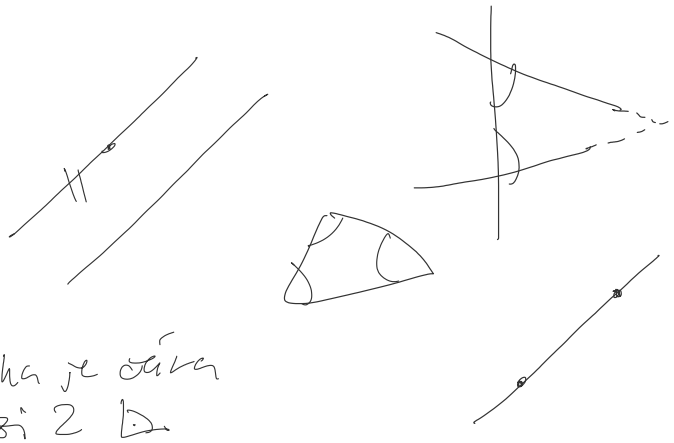
dokázal vr. 1929 Kurt Gödel 1906–1978

Coq – dokazový asistent založený na teorii typů

Thierry Coquand (* 1961) Calculus of constructions (1988)

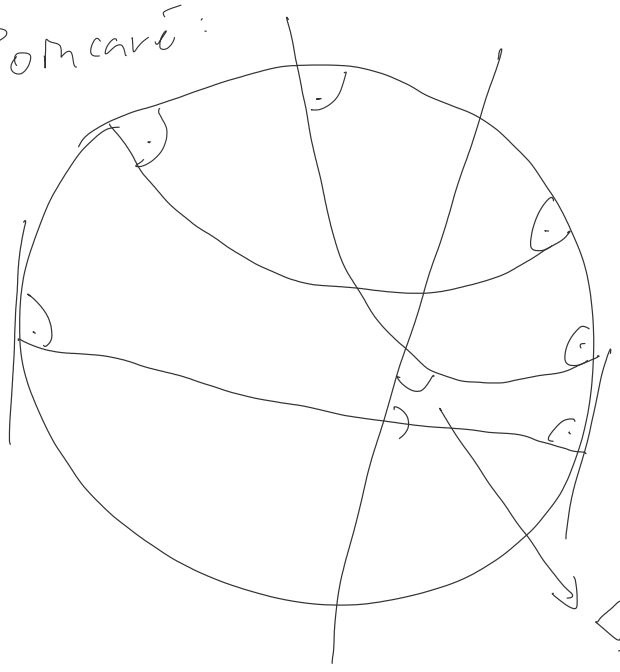
Euklid 330–275 př. n. l. „Základy"

axiomatická budování geometrie



přímka je dána mezi 2 b.

Poincaré:



5. postulát neplatí

Sférická geometrie

Cvičení 8

pondělí 17. dubna 2023 16:47

Úloha 1. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou proměnných a symbolů:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var} &= \{x\} \\ \mathrm{Pred} &= \{P, Q\}, \quad ar(P) = ar(Q) = 1 \\ \mathrm{Func} &= \emptyset \\ \mathrm{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Uvažujte sentenci φ:

$$\varphi = \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

1. Rozhodněte, zda je φ splnitelná.
2. Rozhodněte, zda je φ tautologie.

$\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$

1.) φ splnitelná? Zkusím najít její model.
(Nalezu interpretaci $\mathcal{I}$, ve které je φ pravdivá)

$\mathcal{I}$ specifikuji takto:

$U = \{u, v, w\}$

$[\![P]\!] \subseteq U, \quad [\![P]\!] = \{u\}$

$[\![Q]\!] \subseteq U, \quad [\![Q]\!] = \{u, v\}$

φ sentence;

$\mathrm{Var} \xrightarrow{\zeta} U$

$x \longmapsto *$ je φ pravdivá v interpretaci $\mathcal{I}$ (a kontextu ζ)?

$\varphi = \forall x \left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)$

Musí být pravdivá formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$ $=: \psi$ pro každý update $\zeta[x := d]$ kontextu ζ.

Je ψ pravdivá v kontextu

$\zeta[x := u]$? $\quad \zeta[x := v]$? $\quad \zeta[x := w]$?

τ: $\mathrm{Var} \to U$, $x \mapsto u$ $\quad \sigma$: $\mathrm{Var} \to U$, $x \mapsto v$ $\quad \omega$: $\mathrm{Var} \to U$, $x \mapsto w$

$[\![P(x) \Rightarrow Q(x)]\!]_\tau$

Pokud $[\![x]\!]_\tau$ (má vlastnost P)

$\in [\![P]\!]$

pak $[\![x]\!]_\tau \in [\![Q]\!]$.

Pokud $v \in [\![P]\!]$, pak $v \in [\![Q]\!]$

$\{u\}$ $\quad \{u, v\}$

Pravda

$[\![P(x) \Rightarrow Q(x)]\!]_\sigma$

Pokud $[\![x]\!]_\sigma = v \in [\![P]\!] = \{u\}$,

pak

$[\![x]\!]_\sigma = v \in [\![Q]\!] = \{u, v\}$

Předpoklad není splněn, proto pravda

$[\![P(x) \Rightarrow Q(x)]\!]_\omega$

Pokud $[\![x]\!]_\omega = w \in [\![P]\!] = \{u\}$,

pak

$[\![x]\!]_\sigma = w \in [\![Q]\!] = \{u, v\}$

$w \notin \{u\}$

$w \notin \{u, v\}$

Není splněn ani předpoklad, ani závěr.

Implikace je tedy pravdivá.

ψ je pravdivá ve všech updatech kontextu ζ, sentence φ je

φ je pravdivá ve všech updatech kontextu $\mathcal{S}$, sentence φ je tedy pravdivá v interpretaci $\mathcal{I}$.

1.) φ je tedy splnitelná (má model $\mathcal{I}$)

2.) Je φ tautologie? $(\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$

φ musí být pravdivá ve všech interpretacích. Je?

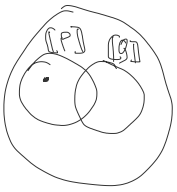
Je každá interpretace modelem sentence φ?

Ať $\mathcal{I}$ je interpretace s universem

$U = \mathbb{N}$

$[\![P]\!] = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 15\}$,

$[\![Q]\!] = \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$.



V interpretaci $\mathcal{I}$ sentence φ není pravdivá:

$\varphi = \forall x(\underbrace{P(x) \Rightarrow Q(x)}_{\psi})$

Uvažujme kontext $\mathcal{S}$; Je formule ψ pravdivá ve všech updatech kontextu $\mathcal{S}$?

$Var \longrightarrow \mathbb{N}$

$x \longmapsto *$ Ať $\sigma = \mathcal{S}[x := 17]$.

ψ není pravdivá v kontextu σ:

$[\![P(x) \Rightarrow Q(x)]\!]_\sigma \ldots$ {pokud $17 \in [\![P]\!]$, pak $17 \in [\![Q]\!]$.

Vzhledem k: pokud $17 > 15$, potom je $\underbrace{17 = 2k}_{17 \text{ je sudé}}$, pro něj $k \in \mathbb{N}$

předpoklad splněn, závěr je nepravdivý: 17 je liché

ψ je nepravdivá v kontextu $\sigma = \mathcal{S}[x := 17]$

Proto je $\forall x(\underbrace{P(x) \Rightarrow Q(x)}_{\varphi})$ v interpretaci $\mathcal{I}$ nepravdivá

(čili není tautologie)

1. Rozhodněte, zda je splnitelná množina sentencí

$$S = \{\forall x \forall y(x + y = y + x), \forall x(S(x) \Rightarrow S(x + x))\}$$

2. Rozhodněte, zda je sentence

$$\varphi = \neg\exists x(x + x = x)$$

sémantickým důsledkem množiny sentencí S.

$Var = \{x, y\}$

$Pred = \{S\}$ unární

$Func = \{+\}$ binární

formálně:

$\varphi = \neg\exists x(x + x = x)$

sémantickým důsledkem množiny sentencí S.

$Func = \{+\}$ binární

formálně: $+(x, y)$ — prefixový zápis

$x + y$ — infixový zápis

$Rels = \emptyset$

Existuje interpretace, ve které jsou obě sentence z S pravdivé?

(1.) Vymyslíme interpretaci, ve které budou pravdivé obě sentence z S.

$U = \mathbb{N}$, $[\![+]\!] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$

$(m, n) \longmapsto m + n$

$[\![S]\!] \subseteq \mathbb{N}$, $[\![S]\!] = \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$ množina sudých přirozených čísel

$\varphi = \forall x \forall y (x + y = y + x)$ je pravdivá v interpretaci $\mathcal{I}$

(φ tvrdí: sčítání je komutativní)

$\psi = \forall x \left(S(x) \Rightarrow S(x + x)\right)$

pro libovolné přir. číslo n platí, pokud je n sudé, potom je i $n + n$ sudé.

$n = 2k, k \in \mathbb{N}$

potom

$n + n = 2k + 2k = 2(k + k)$ $\quad n + n = 2 \cdot l$, $l \in \mathbb{N}$, $l = k + k$

Sentence ψ je v interpretaci $\mathcal{I}$ je pravdivá.

φ a ψ jsou pravdivé, $\mathcal{I}$ je jejich modelem. Potom množina S je splnitelná.

Je sentence $\varphi = \neg\exists x(x + x = x)$ sémantickým důsledkem množiny sentencí S ($S \models \varphi$?)

Je pro každou interpretaci, ve které je pravdivé S, pravdivá i sentence φ?

$\mathcal{I}$: $U = \mathbb{N}$, $[\![+]\!]$ ... sčítání přir. čísel

$[\![S]\!]$ ... mn. sudých přir. čísel

$\mathcal{I}$ je modelem obou sentencí z mn. S.

Je $\mathcal{I}$ modelem φ?

$\neg\exists x\,(x+x=x)$

$\alpha := \; x+x=x.$

V kontextu proměnných $\mathrm{var} \xrightarrow{\beta} \mathbb{N}$ je α pravdivá

$x \longmapsto 0$

$[\![x+x=x]\!]_\beta \dots 0+0=0$ je pravdivá

$\exists x\,(x+y=x)$ je pravdivá v interpretaci $\mathcal{I}$.

$\underbrace{\neg\exists x\,(x+x=x)}_{\varphi}$ je v $\mathcal{I}$ nepravdivá.

S je v $\mathcal{I}$ pravdivá

φ je v $\mathcal{I}$ pravdivá

Nalezli jsme interpretaci dokazující $S \not\models \varphi$.

Přednáška 13

úterý 18. dubna 2023 12:44

Teorie grafů

Intuice pro graf neorientovaný

Definice 1 (situace smyčky (loops), paralelní hrany)

V je libovolná množina (i $V = \emptyset$)

$E \subseteq \binom{V}{2}$ — množina dvojic prvků z V

Potom (V, E) je neorientovaný graf

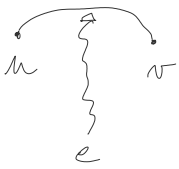
(V je množina vrcholů / vertices)

(E je množina hran / edges)

Poznámky:

(1) $e \in E \longrightarrow e \in \binom{V}{2}$

$\longrightarrow e = \{u, v\}$ (pozor: $u \neq v$)



prohodíme

$\{u, v\} = \{v, u\} = e$

(2) $e = \{u, v\}$ $e = u - v = v - u$

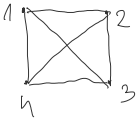
Př. K_n ... úplný graf na n vrcholech

K_1 : $E \subseteq \binom{V}{2} = \binom{\{u\}}{2} = \emptyset$

K_2 $\binom{\{u,v\}}{2} = \{\{u, v\}\} = E$

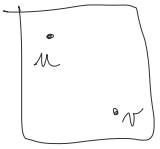
K_n má vrcholy V, $E \stackrel{?}{=} \binom{V}{2}$

K_4

K_4 

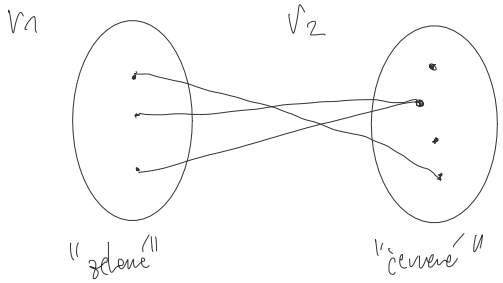
Př. Diskrétní graf D_V V ... množina vrcholů

$\phi = E \subseteq \binom{V}{2}$

$D_{\{u,v\}}$ = 

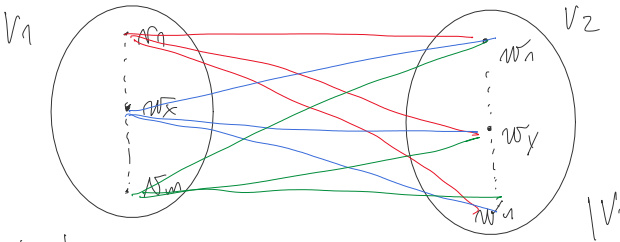
Př. Bipartitní graf

$V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$



tzn $e \in E \longrightarrow \{u,v\}$, kde $u \in V_1$ a $v \in V_2$

Speciální bipartitní grafy $K_{m,n}$



$|V_1| = m$ počet prvků

$|V_2| = n$

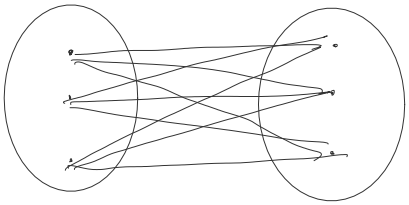
(každý s každým z druhé strany)

tzn. $K_{m,n}$ je bipartitní graf ("partitions" V_1, V_2)

pro $\forall v \in V_1$ je $\{v,w\}$ hrana pro $\forall w \in V_2$

& pro $\forall w \in V_2$ je $\{v,w\}$ hrana pro $\forall v \in V_1$

Důležitý příklad: $K_{3,3}$



Tvrzení

(1) K_n (úplný graf na n vrcholech).

Pak K_n má $\binom{n}{2}$ hran ($\text{tzn. } \frac{n(n-1)}{2}$, pro $n \geq 1$, 0 pro $n=0$)

(2) $K_{m,n}$ má $m \cdot n$ hran

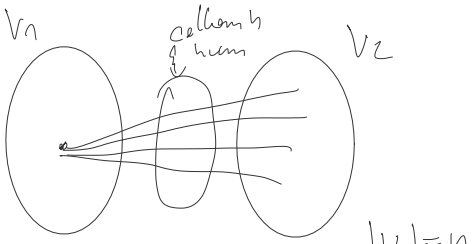
Důkaz

(1) $K_n = (V, \binom{V}{2})$

$|V| = n$

$\left|\binom{V}{2}\right| = \begin{cases} \binom{n}{2} & \text{pro } n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$

(2.)



celkově $m \cdot n$ hran

Def 1

Def 2 (Dovoluje loops, paralelegses)

Graf je $(V, E, \varepsilon : E \longrightarrow \binom{V}{\leq 2})$

vrcholy, hrany, incidenční funkce

PŘ. Graf je podle Def 2

$V = \{a, b, c\}$

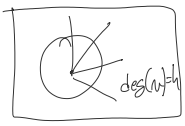
$V = \{a, b, c\}$

$E = \{e, f, g\}$

$\varepsilon(e) = \{a, b\}$

$\varepsilon(f) = \{a, b\}$

$\varepsilon(g) = \{c, c\} = \{c\}$

Def (myšlenka )

(V, E) je graf (Def 1)

$\deg_{(V,E)}(v)$ = počet hran $\{a, b\}$,

$v \in V$ kde $v \in \{a, b\}$

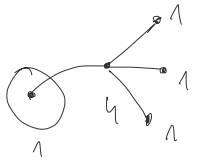
Pozn. Grafy

se $\deg(v) = 2$

se $\deg(v) = 3$

Lemma (V, E) bez ,

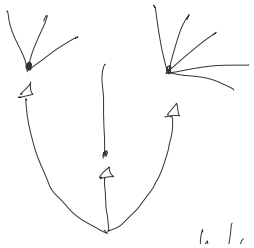
Potom $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$

(**Př.** 

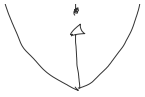
)

Důkaz

Důsledek



i. i. s lichým stupněm

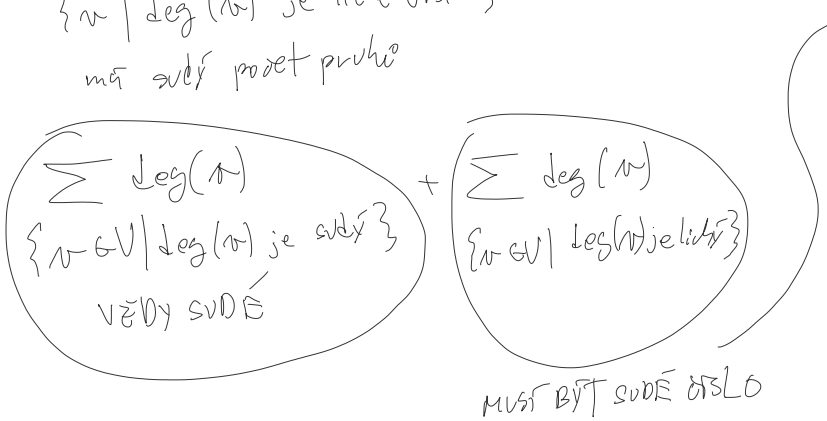


3 vrcholy s lichým stupněm

(V,E) graf

$\{v \mid \deg(v)$ je liché číslo$\}$

má sudý počet prvků

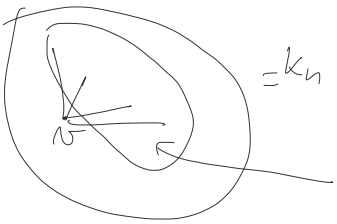


$\{v \mid \deg(v)$ je liché$\}$
má sudý počet prvků

Def. Graf (V,E) je r-regulární, když $\deg(v) = r$ pro $\forall v \in V$

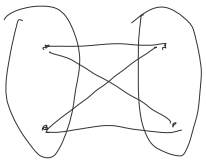
Př. (1) $= K_2$ je 1-regulární

(2) $= K_3$ je 2-regulární

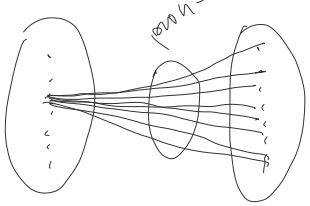
(3) 

$= K_n$ je $(n-1)$-regulární

$(n-1)$ ostatních vrcholů

(4)  $= K_{2,2}$

je 2-regulární

(5) 

$= K_{n,n}$

je n-regulární

(6) Dgraf$\{c\}$ =

je 0-regulární

1.

(7) $|V| = n$ liché, n liché číslo. Pak neexistuje r-regulární graf s množinou vrcholů V.

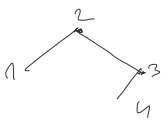
Důkaz: $V(V, E)$

musí ex. sudý počet vrcholů s lichým stupněm

$n=5$, $r=3$

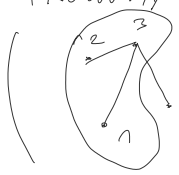
$G = (V, E)$ graf

Podgraf G je $G' = (V', E')$ kde $V' \subseteq V$ & $E' \subseteq E$



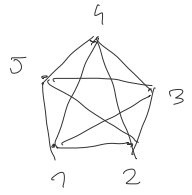
tzn. nějaké hrany spojující vrcholy ve V'

Podgraf indukovaný $V' \subseteq V$ je

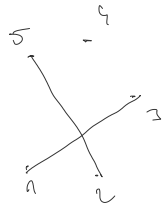


nahoře

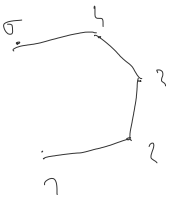
Faktor grafu G je $G' = (V, E')$ kde $V' = V$ $E' \subseteq E$



$G = (V, E)$



faktor



kostra = speciální faktor

Znovu a jinak

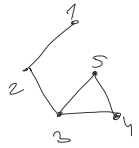
(1) Faktor grafu G → jasné

(2) $G = (V, E)$, $V' \subseteq V$

pak graf indukovaný V' je $(V', E|_{V'})$

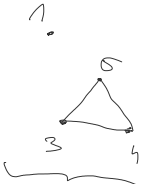
kde $e \in E|_{V'} \longleftrightarrow e = \{u, v\}$ & $u \in V'$, $v \in V'$

(3) $G = (V, E)$ jeho podgraf je faktor $(V', E|_{V'})$ pro nějaké $V' \subseteq V$

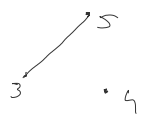
Př. $G =$ 

$V = \{1,2,3,4,5\}$

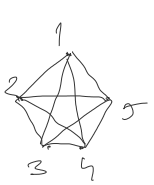
$V' = \{1,3,4,5\}$



podgraf indukovaný V' → jeho faktor

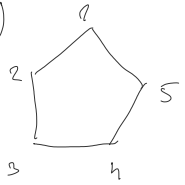


Př.

K_5 

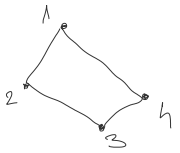
(1) $V' = \{1,2,3,4\}$

podgraf G indukovaný V'

(2) 

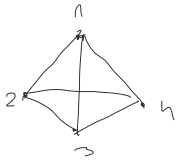
$= C_5$ je podgraf K_5

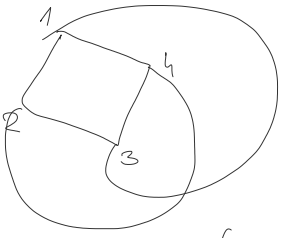
a je to také faktor K_5

(3) 

$= C_4$ je podgraf K_5 (ale nejde podgraf indukovaný $\{1,2,3,4\}$)

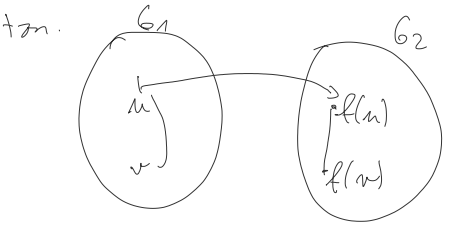
"zakreslení grafu" – zatím neostrý pojem



versus


Definice $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ jsou isomorfní, když existuje isomorfismus

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2$$

tzn. 

$V_1 \xrightarrow[\text{bij.}]{f} V_2$

&

$uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2$

Test 1

sobota 22. dubna 2023 14:33

Zahl. pozhl.

① $a \wedge b \vdash b \wedge a$

1.	$a \wedge b$	P
2.	a	$e\wedge 1,1$
3.	b	$e\wedge 2,1$
4.	$b \wedge a$	$i\wedge 2,3$

② $(p \wedge q) \wedge r,\ s \wedge t \vdash q \wedge s$

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	P
2.	$s \wedge t$	P
3.	$(p \wedge q)$	$e\wedge 1$
4.	q	$e\wedge 2$ 3
5.	s	$e\wedge 1$ 2
6.	$q \wedge s$	$i\wedge 4,5$

③ $q, r \vdash (q \Rightarrow r) \Rightarrow r$

1.	q	P
2.	$q \Rightarrow r$	P
		$e\Rightarrow 1,2$
3.	r	
4.	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow r$	$i\Rightarrow$ 2-3

④ $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \vdash (a \wedge b) \Rightarrow c$

1.	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$	P
2.	$a \wedge b$	P
3.	a	$e\wedge 1$ 3
4.	b	$e\wedge 2$ 3
5.	$b \Rightarrow c$	$e\Rightarrow 3,1$
6.	c	$e\Rightarrow 4,5$
7.	$(a \wedge b) \Rightarrow c$	$i\Rightarrow$ 2-7

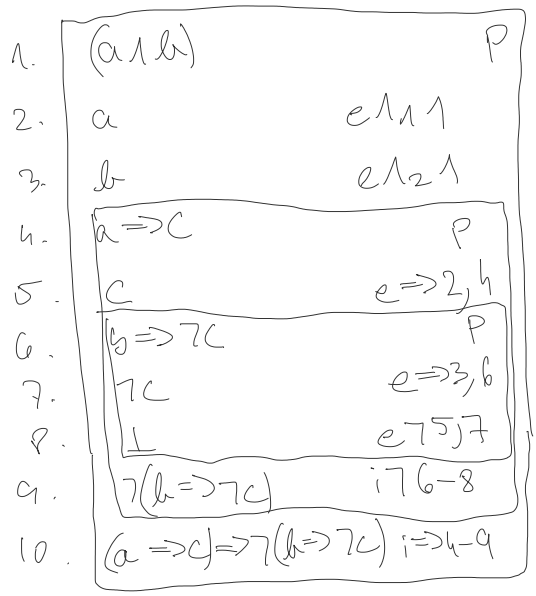
5. $\vdash \neg(a \wedge b) \Rightarrow (a \Rightarrow \neg b)$

1.	$\neg(a \wedge b)$	P
2.	a	P
3.	b	P
4.	$a \wedge b$	$i\wedge 2,3$
5.	$\bot$	$e\neg 1,4$
6.	$\neg b$	$i\neg 2\text{-}3$
7.	$a \Rightarrow \neg b$	$i\Rightarrow 2\text{-}6$
8.	$\neg(a \wedge b) \Rightarrow (a \Rightarrow \neg b)$	$i\Rightarrow 1\text{-}7$

6. $\vdash ((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)) \Rightarrow \neg(a \wedge b)$

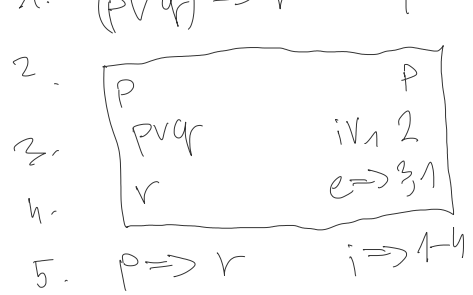
1.	$(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)$	P
2.	$a \Rightarrow c$	$e\wedge_1 1$
3.	$b \Rightarrow \neg c$	$e\wedge_2 1$
4.	$a \wedge b$	P
5.	a	$e\wedge_1 4$
6.	b	$e\wedge_2 4$
7.	c	$e\Rightarrow 5,2$
8.	$\neg c$	$e\Rightarrow 6,3$
9.	$\bot$	$e\neg 7,8$
10.	$\neg(a \wedge b)$	$i\neg 4\text{-}9$
11.	$(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c) \Rightarrow \neg(a \wedge b)$	$i\Rightarrow 1\text{-}10$

7. $\vdash (a \wedge b) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \Rightarrow \neg(b \Rightarrow \neg c))$

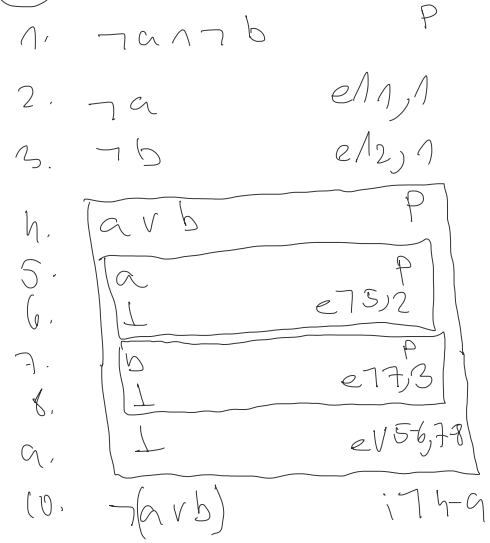


11. $(a \wedge b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) \Rightarrow \neg(b \Rightarrow \neg c)$ i⇒ 1-10

(8.) $(p \vee q) \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$

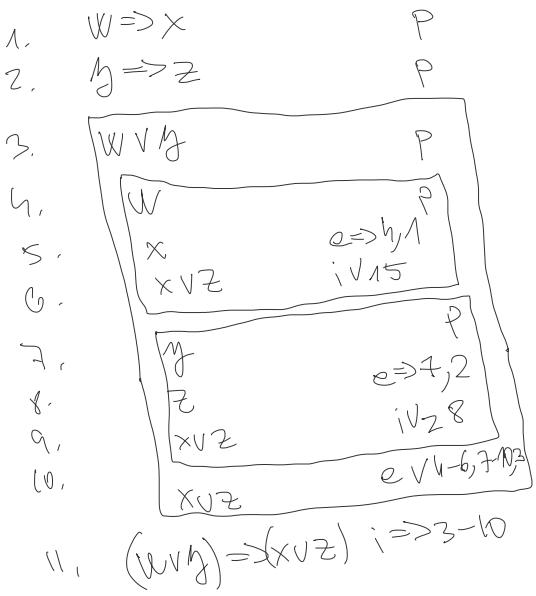


(9.) $\neg a \wedge \neg b \vdash \neg(a \vee b)$

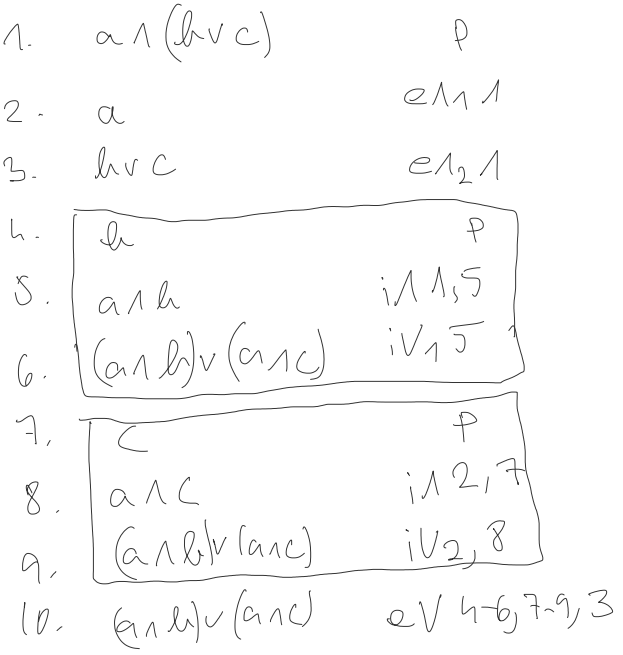


(10.) $w \Rightarrow x, y \Rightarrow z \vdash (w \vee y) \Rightarrow (x \vee z)$

1. $w \Rightarrow x$ P
2. $y \Rightarrow z$ P

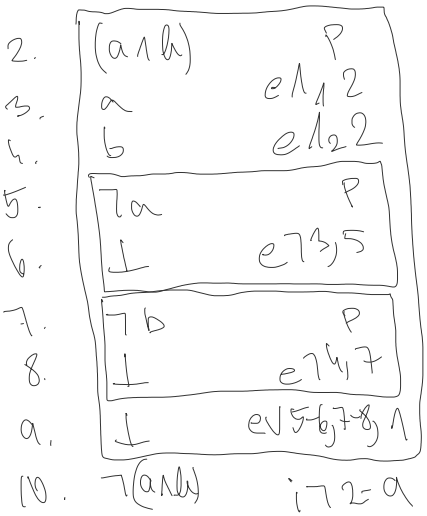


(11.) $a \wedge (b \vee c) \vdash (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$



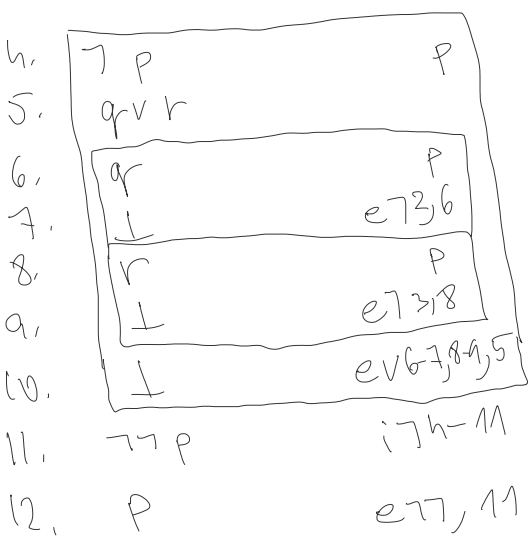
(12.) $\neg a \vee \neg b \vdash \neg(a \wedge b)$

1. $\neg a \vee \neg b$ P

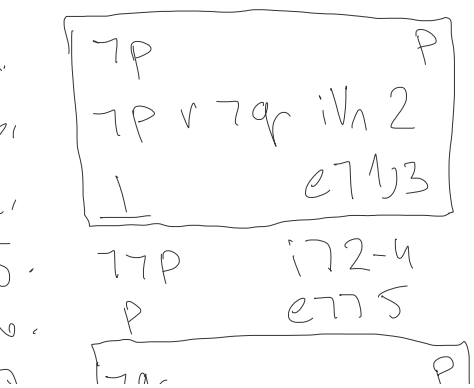


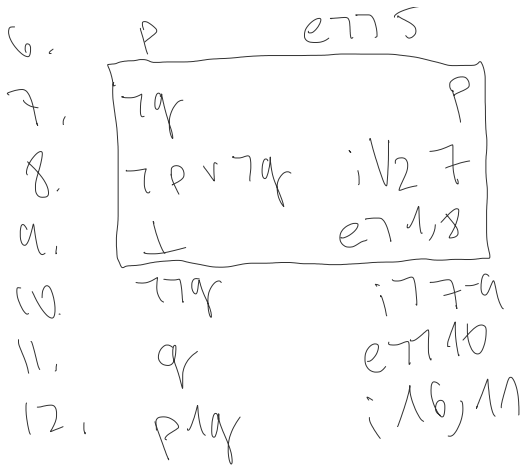
Nepřímé důkazy

1. $\neg p \Rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash p$



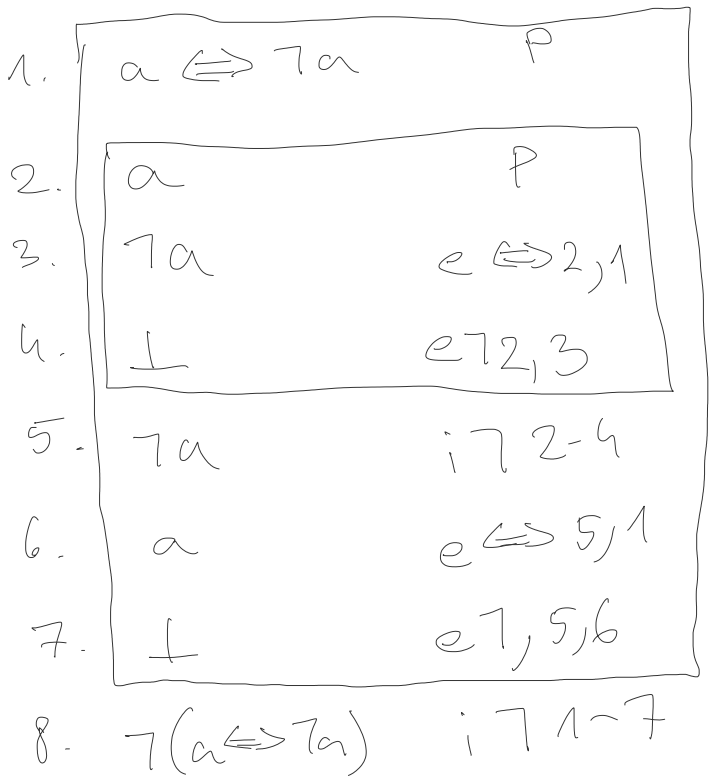
2. $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$



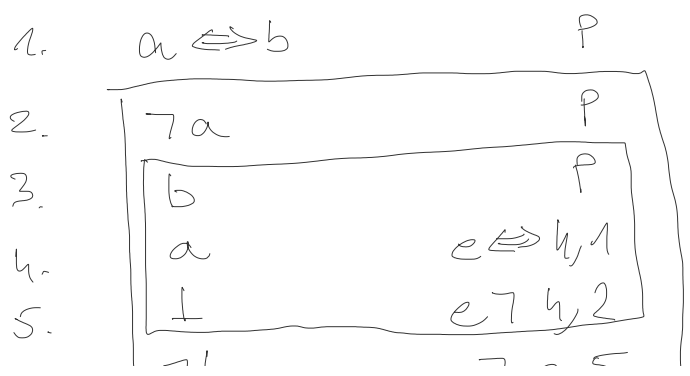


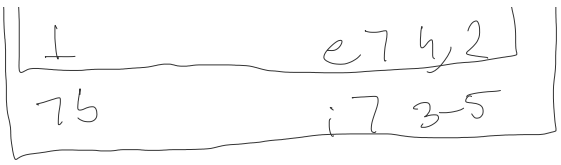
Příklady s ekvivalencí

1. $\vdash \neg(a \Leftrightarrow \neg a)$

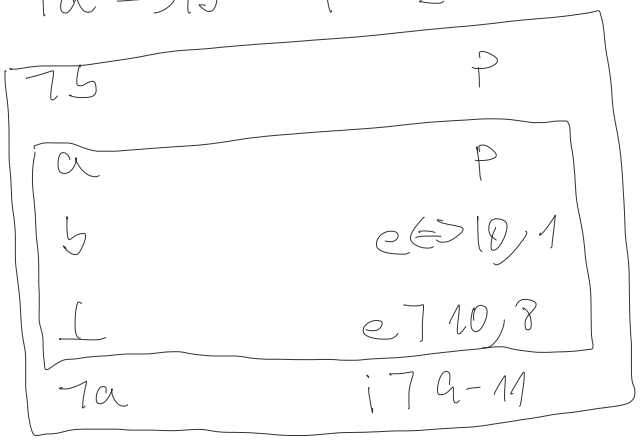


2. $a \Leftrightarrow b \vdash (\neg a \Leftrightarrow \neg b)$





7. $\neg a \Rightarrow \neg b$ i⇒ 2-6



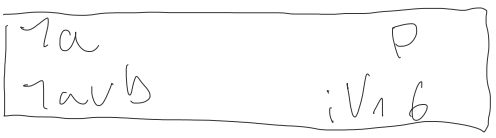
13. $\neg b \Rightarrow \neg a$ i⇒ 8-12

14. $\neg a \Leftrightarrow \neg b$ i⇔ 7,13 (nebo s pís i⇔ 2-6, 8-12)

Příklady s využitím LEM

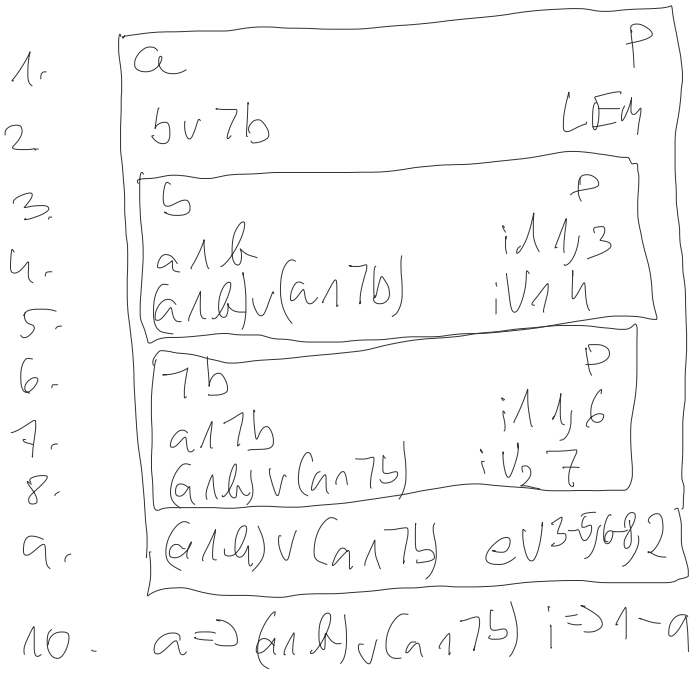
(1.) $a \Rightarrow b \vdash \neg a \vee b$

1. $a \Rightarrow b$ P
2. $\neg a \vee a$ LEM



8. $\neg a \vee b$ e∨ 3-5 6-7, 2

(2.) $\vdash a \Rightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b))$


1. a P
2. b ∨ ¬b LEM
3. b P
4. a ∧ b i∧ 1,3
5. (a ∧ b) ∨ (a ∧ ¬b) i∨ 1 4
6. ¬b P
7. a ∧ ¬b i∧ 1,6
8. (a ∧ b) ∨ (a ∧ ¬b) i∨ 2 7
9. (a ∧ b) ∨ (a ∧ ¬b) e∨ 3-5 6-8 2
10. a ⇒ (a ∧ b) ∨ (a ∧ ¬b) i⇒ 1-9

Test 1 - 2

sobota 22. dubna 2023 17:36

1.1. Unární predikáty

(1.) $\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)$

1.	$\forall x P(x)$	P
2.	x_0	D
3.	$P(x_0)$	e$\forall$x 1
4.	$\forall y P(y)$	i$\forall$y 2-3

(2.) $\vdash \forall x (P(x) \Rightarrow P(x))$

1.	x_0	D
2.	$P(x_0)$	P
3.	$P(x_0) \Rightarrow P(x_0)$	i$\Rightarrow$2-2
4.	$\forall x (P(x) \Rightarrow P(x_0)$	i$\forall$x 1-3

(3.) $\forall x (P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \forall z Q(z)$

1.	$\forall x (P(a) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$P(a)$	P
3.	z_0	D
4.	$P(a) \Rightarrow Q(z_0)$	e$\forall$x,1
5.	$Q(z_0)$	e$\Rightarrow$2,1

5. $Q(z_0)$ $e\Rightarrow 2,1$

6. $\forall z\, Q(z)$ $i\forall z\ 3\text{-}5$

7. $P(a) \Rightarrow \forall z\, Q(z)$ $i\Rightarrow 2\text{-}6$

(4.) $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y) \vdash \forall z (P(z) \wedge Q(z))$

1. $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$ P

2. $\forall x P(x)$ $e\wedge_1 1$

3. $\forall y Q(y)$ $e\wedge_2 1$

4. z_0 D

5. $P(z_0)$ $e\forall x, 2$

6. $Q(z_0)$ $e\forall y, 3$

7. $P(z_0) \wedge Q(z_0)$ $i\wedge 5,6$

8. $\forall z (P(z) \wedge Q(z))$ $i\forall z\ 4\text{-}7$

(5.) $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall y P(y) \Rightarrow \forall z Q(z)$

1. $\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)$ P

2. $\forall y P(y)$ P

3. z_0 D

4. $P(z_0)$ $e\forall y, 2$

5. $P(z_0) \Rightarrow Q(z_0)$ $e\forall x, 1$

6. $Q(z_0)$ $e\Rightarrow 4,5$

5.	$P(z_0) \Rightarrow Q(z_0)$	$e\forall x, 1$
6.	$Q(z_0)$	$e\Rightarrow 4, 5$
7.	$\forall z\, Q(z)$	$i\forall z\ 3\text{-}6$
8.	$\forall y\, P(y) \Rightarrow \forall z\, Q(z)$	$i\Rightarrow 2\text{-}7$

6. $\forall z(P(z) \wedge Q(z)) \vdash \forall y\, P(y) \wedge \forall y\, Q(y)$

1.	$\forall z(P(z) \wedge Q(z))$	P
2.	y_0	D
3.	$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	$e\forall z, 1$
4.	$P(y_0)$	$e\wedge_1 3$
5.	$\forall y\, P(y)$	$i\forall y\ 2\text{-}4$
6.	y_0	D
7.	$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	$e\forall z, 1$
8.	$Q(y_0)$	$e\wedge_2 7$
9.	$\forall y\, Q(y)$	$i\forall y\ 6\text{-}8$
10.	$\forall y\, P(y) \wedge \forall y\, Q(y)$	$i\wedge 5, 9$

7. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x \neg Q(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

1.	$\forall x\, P(x) \Rightarrow Q(x)$	P
2.	$\forall x \neg Q(x)$	P
3.	x_0	D
4.	$P(x_0)$	P
5.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
6.	$\neg Q(x_0)$	$e\forall x, 2$

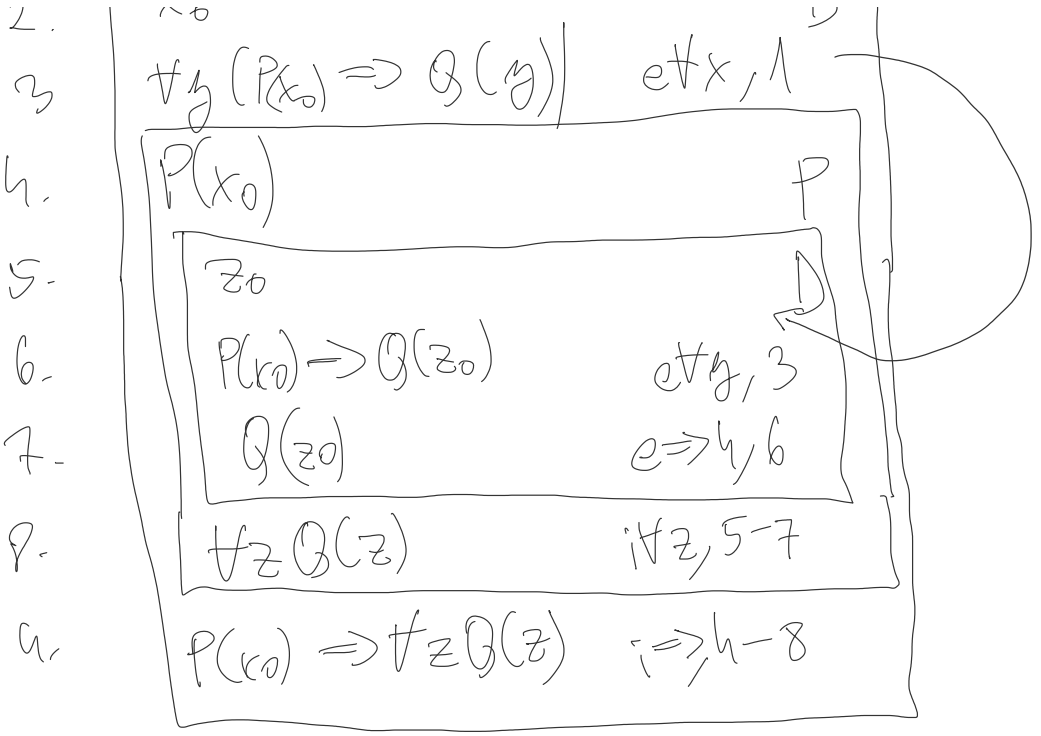
5.	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$e\vee x,1$
6.	$\neg Q(x_0)$	$e\forall 0,2$
7.	$Q(x_0)$	$e\Rightarrow 4,5$
8.	$\bot$	$e\neg 7,6$
9.	$\neg P(x_0)$	$i\neg 4-8$
10.	$\forall x \neg P(x)$	$i\forall x\ 3-9$

(8.) $\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \vdash \forall z (P(z) \vee Q(z))$

1.	$\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$	P
2.	z_0	D
3.	$\forall x P(x)$	P
4.	$P(z_0)$	$e\forall x,3$
5.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	$i\vee_1 4$
6.	$\forall y Q(y)$	P
7.	$Q(z_0)$	$e\forall y,6$
8.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	$i\vee_2 7$
9.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	$e\vee 1,3-5,6-8$
10.	$\forall z (P(z) \vee Q(z))$	$i\forall z\ 3-9$

(9.) $\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow Q(y)) \vdash \forall x (P(x) \Rightarrow \forall z Q(z))$

1.	$\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow Q(y))$	P
2.	x_0	D
3.	$\forall y (P(x_0) \Rightarrow Q(y))$	$e\forall x,1$

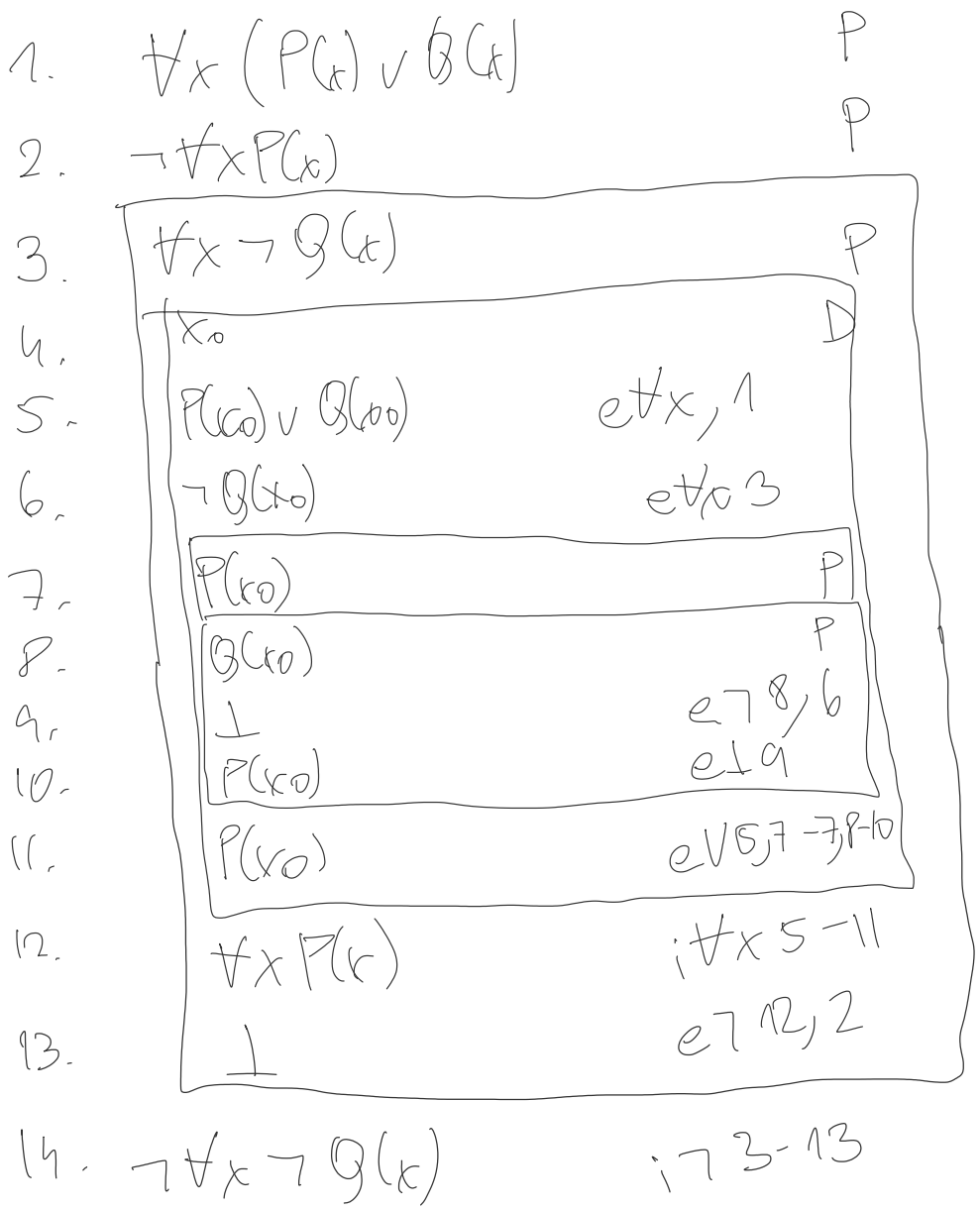


(10.) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$

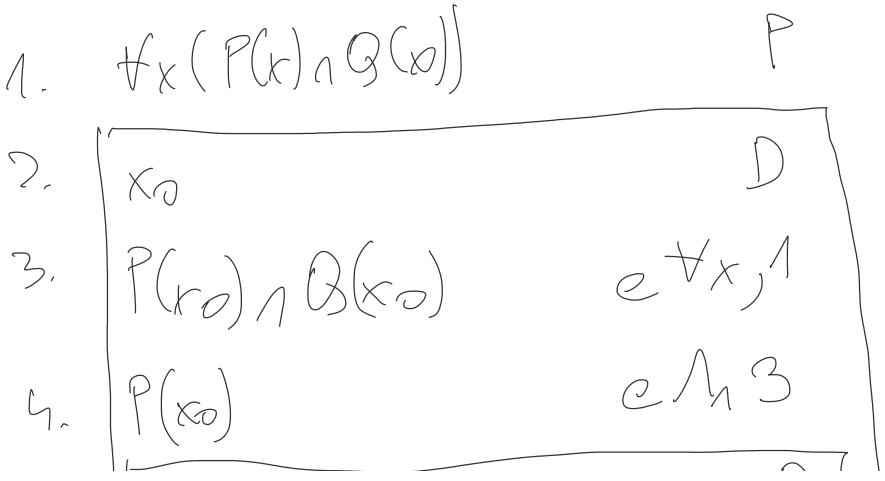
1.	$\forall x\, P(x) \Rightarrow Q(x_0)$		P
2.	$\forall x\, Q(x) \Rightarrow R(x)$		P
3.	x_0		D
4.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	e∀x1	
5.	$Q(x_0) \Rightarrow R(x_0)$	e∀x2	
6.	$P(x_0)$		P
7.	$Q(x_0)$	e⇒ 6,4	
8.	$R(x_0)$	e⇒ 7,5	
9.	$P(x_0) \Rightarrow R(x_0)$	i⇒ 6,8	
10.	$\forall x\, P(x) \Rightarrow R(x)$	i∀x 4-9	

(11.) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \neg\forall x P(x) \vee \neg\forall x \neg Q(x)$

11. $\forall x(P(x) \vee Q(x)),\ \neg\forall x P(x) \vdash \neg\forall x \neg Q(x)$



12. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y))$



4. $P(x_0)$ e∧:3

5. y_0 D

6. $P(y_0) \wedge B(y_0)$ e∀x,1

7. $B(y_0)$ e∧2 6

8. $P(x_0) \wedge B(y_0)$ i∧ 4,7

9. $\forall y\, P(x_0) \wedge B(y)$ i∀y 5–8

10. $\forall x \forall y (P(x) \wedge B(y))$ i∀x, 2-9

Binární predikáty

(1.) $\forall x \forall y R(x,y) \vdash \forall x R(x,x)$

1. $\forall x \forall y R(x,y)$ P

2. x_0 D

3. $\forall y R(x_0, y)$ e∀x,1

4. $R(x_0, x_0)$ e∀y,3

5. $\forall x R(x,x)$

(2.) $\forall x \neg \forall y R(x,b) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y R(b,y)$

1. $\forall x \neg \forall y R(x,y)$ P

2. x_0 D

$\neg \forall y R(x_0, y)$ e∀x 1

y_0 D

$\neg R(x_0, y_0)$

3. $\forall x R(x,x) \vdash \forall x \neg \forall y \neg R(x,y)$

$\forall x R(x_0, x)$	P
x_0	D
$R(x_0, x_0)$	

4. $\forall x \neg R(x,x) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$

Test 1 - 3

neděle 23. dubna 2023 11:12

2. Existenční kvantifikátor

2.1 Úvěrní predikáty

(1.) $\exists x\, P(x) \vdash \exists y\, P(y)$

1.	$\exists x\, P(x)$	P
2.	$y_0 : P(y_0)$	W
3.	$\exists y\, P(y)$	i∃y, 2
4.	$\exists y\, P(y)$	e∃x, 1, 2-3

(3.) $\exists x\,(P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$

1.	$\exists x\,(P(a) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$y_0 : (P(a) \Rightarrow Q(y_0))$	W
3.	$P(a)$	P
4.	$Q(y_0)$	e⇒3, 2
5.	$\exists y\, Q(y)$	i∃y, 4
6.	$P(a) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$	i⇒ 3-5
7.	$P(a) \Rightarrow \exists y\, Q(y)$	e∃x, 1, 2-6

(4.) $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists y\, P(y) \wedge \exists z\, Q(z)$

	$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$	P
	$x_0 : P(x_0) \wedge Q(x_0)$	W
	$P(x_0)$	e∧, 2
	$Q(x_0)$	e∧2 2
	$\exists y\, P(y)$	i∃y 3
	$\exists z\, Q(z)$	i∃z 4
	$\exists y\, P(y) \wedge \exists z\, Q(z)$	i∧ 5, 6
	$\exists y\, P(y) \wedge \exists z\, Q(z)$	e∃x 1, 2-7

(5.) $\vdash \neg\exists x \exists y\,(R(x,y) \wedge \neg R(x,y))$

1.	$\exists x \exists y\,(R(x,y) \wedge \neg R(x,y))$	P
2.	$x_0 : \exists y\,(R(x_0,y) \wedge \neg R(x_0,y))$	W
3.	$y_0 : R(x_0,y_0) \wedge \neg R(x_0,y_0)$	W
4.	$R(x_0,y_0)$	e∧1 3
5.	$\neg R(x_0,y_0)$	e∧2 3
6.	$\bot$	e¬ 4, 5
7.	$\bot$	e∃y 2, 3-6
8.	$\bot$	e∃x 1, 2-7
9.	$\neg\exists x \exists y\,(R(x,y) \wedge \neg R(x,y))$	i¬ 1-8

(6.) $\exists x\, P(x) \vee \exists y\, Q(y) \vdash \exists z\,(P(z) \vee Q(z))$

1.	$\exists x P(x) \vee \exists y Q(y)$	P

2. $\exists x P(x)$ P
3. $z_0 : P(z_0)$ W
4. $P(z_0) \vee Q(z_0)$ $i\vee 1$ 3
5. $\exists z (P(z) \vee Q(z))$ $i\exists z$ 4
6. $\exists z (P(z) \vee Q(z))$ $e\exists x$ 2,3-5
7. $\exists y Q(y)$ P
8. $z_0 : Q(z_0)$ W
9. $P(z_0) \vee Q(z_0)$ $i\vee 2$ 8
10. $\exists z (P(z) \vee Q(z))$ $i\exists z$ 9
11. $\exists z (P(z) \vee Q(z))$ $e\exists y$ 7,8-10
12. $\exists z (P(z) \vee Q(z))$ $e\vee 1$ 2-6, 7-11

(7.) $P(a) \Rightarrow \exists x Q(x) \vdash \exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$

1. $P(a) \Rightarrow \exists x Q(x)$ P
2. $P(a) \vee \neg P(a)$ LEM
3. $P(a)$ P
4. $\exists x Q(x)$ $e\Rightarrow$ 3,1
5. $x_0 : Q(x_0)$ W
6. $P(a)$ P
7. $Q(x_0)$ it 5
8. $P(a) \Rightarrow Q(x_0)$ $i\Rightarrow$ 6-7
9. $\exists x P(a) \Rightarrow Q(y)$ $i\exists x$ 8
10. $\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$ $e\exists x$ 4,5-9
11. $\neg P(a)$ P
12. $P(a)$ P
13. $\bot$ $e\neg$ 12,11
14. $Q(x)$ $e\bot$ 13
15. $P(a) \Rightarrow Q(x)$ $i\Rightarrow$ 12-14
16. $\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$ $i\exists x$ 15
17. $\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$ $e\vee$ 2,3-10,11-16

2.2. Binární predikáty

(1.) $\vdash_{\{zz\}} \exists x \exists y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$

$x_0 : \exists y (R(x_0,y) \Rightarrow R(y,x_0))$ W

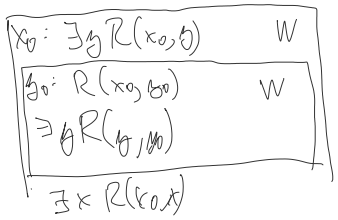
$y_0 : R(x_0,y_0) \Rightarrow R(y_0,x_0)$ W

$R(x_0,y_0)$ P

$R(y_0,x_0)$

(2.) $\exists x \exists y R(x,y) \vdash \exists x \exists y R(y,x)$

$\exists x \exists y R(x,y)$ P



$x_0 : \exists y R(x_0, y)$ W

$y_0 : R(x_0, y_0)$ W

$\exists y R(y, y_0)$

$\exists x R(x_0, x)$

3. $\exists x R(x,x) \vdash \exists x \exists y (R(x,y) \wedge R(y,x))$

1.	$\exists x R(x,x)$	P
2.	$a : R(a,a)$	W
3.	$R(a,a) \wedge R(a,a)$	$i\wedge 2,2$
4.	$\exists y (R(a,y) \wedge R(y,a))$	$i\exists y\, 3$
5.	$\exists x \exists y (R(x,y) \wedge R(y,x))$	$i\exists x\, 4$
6.	$\exists x \exists y (R(x,y) \wedge R(y,x))$	$e\exists x\, 1$

$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) \vdash (a \vee b) \Rightarrow (a \wedge b)$

1.	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$	P
2.	$a \Rightarrow b$	$e\wedge_1 1$
3.	$b \Rightarrow a$	$e\wedge_2 1$
4.	$a \vee b$	P
5.	a	P
6.	b	$e\Rightarrow 5,2$
7.	$a \wedge b$	$i\wedge 5,6$
8.	b	P
9.	a	$e\Rightarrow 8,3$
10.	$a \wedge b$	$i\wedge 9,8$
11.	$a \wedge b$	$e\vee 4,5\text{-}7,8\text{-}10$
12.	$(a \vee b) \Rightarrow (a \wedge b)$	$i\Rightarrow 4\text{-}11$

$\vdash ((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a$

1.	$(a \Rightarrow b) \Rightarrow a$	P
	$\neg a$	P
	a	P
	$\perp$	
	b	
	$a \Rightarrow b$	
	a	
	$\perp$	
	$\neg\neg a$	
	a	

2.3 1. $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

$\neg \exists x P(x)$ P

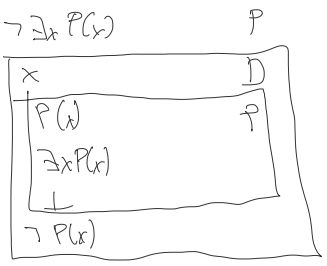
x D

$P(x)$ P

$\exists x P(x)$

$\perp$

$\neg P(x)$



$\forall x \neg P(x)$

$m < n \wedge 0 < n \wedge (m < 0 \Rightarrow 0 < m)$ V

$n = m+1$

$0 = m$

$P(\overset{m\,n}{x,y}) \wedge P(\overset{0\,n}{z,y}) \wedge (P(x,z) \Rightarrow P(z,x))$

$n = 2m$ $\quad n = 20$ $\quad (0 = 2m) \Rightarrow m = 20$

$0 = m$ $\quad 0 = 2m \Rightarrow 0 = 20 \Rightarrow 0 = \emptyset$ potom implikace platí

pokud $0 \neq 2m$, implikace platí taktéž.

$[\![P]\!] = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n + 1\}$

interpretace je vlastně $m \leq n$

potom pro $\forall x \exists y \exists z$ kde $x = m$ lib.

$y = n = m$

$z = 0 = m$

$m \leq n$

$0 \leq n$

proto i $m \leq 0 \Rightarrow 0 \leq m$

$Pred = \{P\}$ $\quad ar(P) = 1$

$Func = \{f\}$ $\quad ar(f) = 2$

$Kons = \{a\}$

Interpretace $\mathcal{I}$ s Universem $U = \mathbb{Z}$

$[\![P]\!] = \{3 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$

$[\![f]\!] : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ je sčítání celých čísel

$[\![a]\!] = 7$

které z flí jsou pravdivé v kontextu proměnných ρ:

$\varphi = P(f(x,a))$, $\psi = \exists x P(f(x,a))$, $\chi = \forall y \exists x P(f(x,y))$

$\rho : Var \longrightarrow \mathbb{Z}$

$x \longmapsto 1$

$\neg a$
a

$((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a)$

$\vdash (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$

$q \vee \neg q$ LEM

$\neg q$ p
q p
$\perp$
r
$q \Rightarrow r$
$(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

q
p p
q it
$p \Rightarrow q$
$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$

$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$

$$\varrho : Var \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto 1$$

Je φ pravdivá? Aby byla φ pravdivá, musela by být pravdivá v kontextu proměnných ϱ:

$$[\![\varphi]\!]_\varrho = [\![P]\!]_\varrho \left([\![f]\!]_\varrho ([\![x]\!]_\varrho, [\![a]\!]_\varrho) \right)$$
$$= [\![P]\!]_\varrho \left([\![f]\!]_\varrho (1, 7) \right)$$
$$= [\![P]\!]_\varrho (1+7)$$
$$= [\![P]\!]_\varrho (8) \longrightarrow \text{není pravdivá, jelikož neexistuje } k \in \mathbb{Z} \text{ takové, aby } k \cdot 3 = 8.$$

φ není pravdivá.

Je ψ pravdivá? ψ je pravdivá, jestliže existuje update kontextu proměnných takový, že je v něm ψ pravdivá.

Zvolme $\pi := \varrho[x := 2]$

Potom: $[\![P(f(x,a))]\!]_\pi$

$$[\![\psi]\!]_\pi = [\![P]\!]_\pi \left([\![f]\!]_\pi ([\![a]\!]_\pi, [\![x]\!]_\pi) \right)$$
$$= [\![P]\!]_\pi \left([\![f]\!]_\pi (7, 2) \right)$$
$$= [\![P]\!]_\pi (7+2)$$
$$= [\![P]\!]_\pi (9) \longrightarrow \text{pravda, } k = 3 \in \mathbb{Z}$$

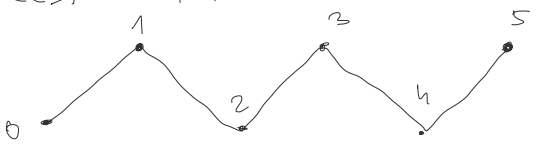
$\forall x (\exists y (M(x,y) \vee M(y,x)) \Rightarrow M(x,x)), \exists x \exists y\, M(x,y) \vdash \exists x M(x,x)$

Přednáška 14

pondělí 24. dubna 2023 11:01

Souvislost grafu

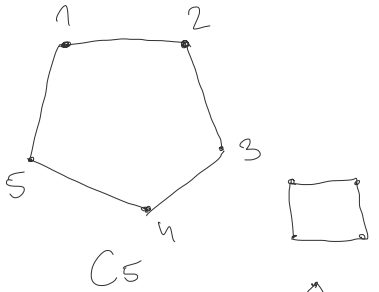
Cesta: P_n



P_5 .... cesta délky 5

hran v P_5

kružnice: C_n $(n \geq 3)$



C_5

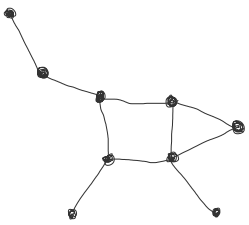
možnost paralelních hran:

$n = 2$

$n = 1$ smyčka

Sled:

délky k



posloupnost vrcholů a hran

$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \ldots v_k$

tedy že $v_{i-1} \xrightarrow{e_i} v_i$ ex. v G

$\forall i = 1, \ldots, k$

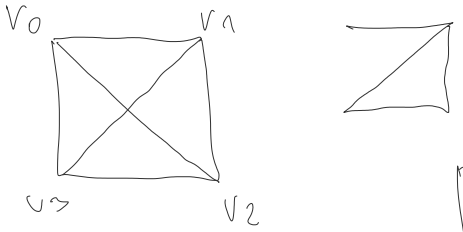
Tah: sled, v němž se neopakují hrany

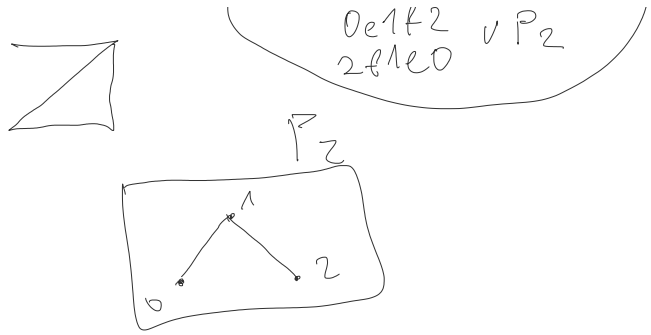
Cesta: tah, v němž se neopakují vrcholy. $v_0 v_1 v_3 v_2 (v_1)$

dvě cesty délky 2

$0e1f2$ v P_2

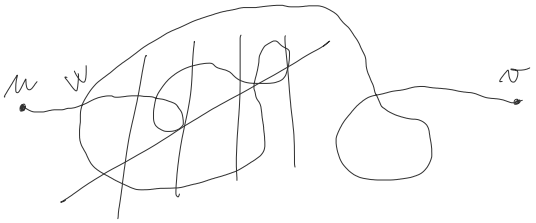
$2f1e0$





Def. Graf G je souvislý, pokud mezi každými jeho dvěma vrcholy existuje cesta.

Lemma o zkrácení na cestu:



podsled

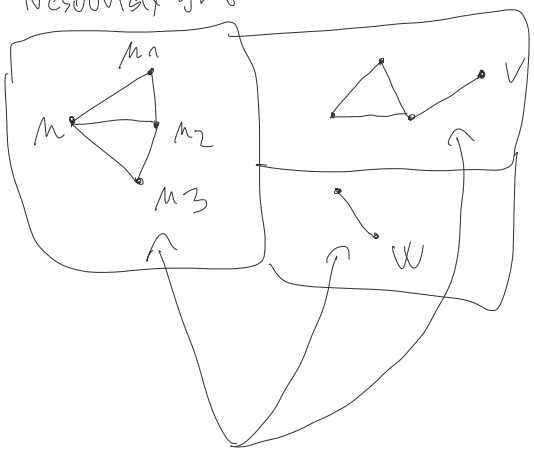
$uev' \ldots \underbrace{w \ldots w} \ldots v$

$\times$

$uev' \ldots w \ldots v$

Dostupnost $u \sim v$ je relace ekvivalence

Nesouvislý graf:



Komponenty souvislosti grafu G

G $u, v \in V$

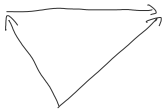
vzdálenost na v: $dist(u,v)$

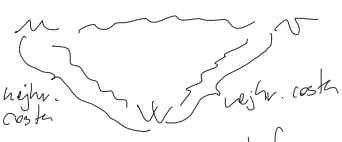
délka nejkratší cesty mezi u a v

$V \times V \xrightarrow{dist} \mathbb{N}$ Pokud cesta mezi u a v neex., $dist(u,v) = +\infty$

pro souvislý graf G je dist metrikou.

$dist(u,v) = dist(v,u)$





$dist(u,v) \leq dist(u,w) + dist(w,v)$

$U \times V \longrightarrow \mathbb{N}$

u a v neex.,
položíme $dist(u,v) = +\infty$

$dist(u,v) \leq dist(u,w) + dist(w,v)$

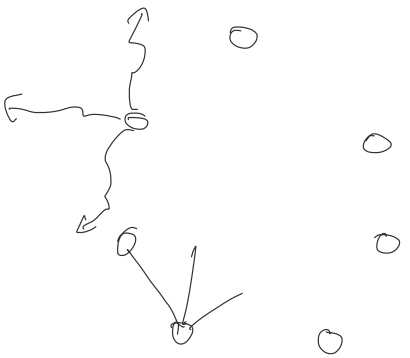
Cvičení 9

pondělí 24. dubna 2023 13:42

každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

Sedm přátel pošle pohledy ostatním, každý třem ostatním.

Může se stát, že každý dostane pohledy přesně od těch, kterým pohledy poslal?



$d(v)=3$

nelze, lichý počet vrcholů lichého stupně

V každém obyčejném grafu o alespoň 2 vrcholech

prostém bez smyček

existují min. 2 vrcholy stejného stupně.

Kdyby měl každý vrchol (n vrcholů) jiný stupeň, potom zároveň vrchol ze kterého hrany nikam a vrchol, ze kterého hrany všude. Co ale hrana mezi těmito vrcholy. To je spor.

Hyperkrychle (n-cube)

má množinu vrcholů $0, 1, 2, \dots, 2^n-1$

hrana mezi u a v vede p.t.h.

sin zápis u a v se liší přesně v 1 bitu.

nakreslete n-cube pro $n=2,3,4$.

sin zápis u a v se liší [illegible]

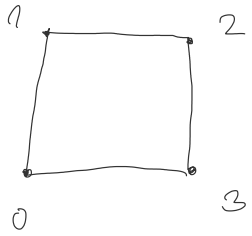
Nakreslete n-cube pro n=2,3,4.

Spočtěte #V, #E v n-cube

$\boxed{n=1}$: vrcholy $\underbrace{0, \dots 2^n-1}_{0,1}$

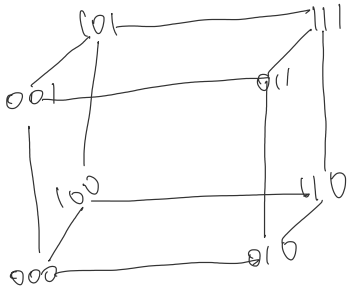
$\boxed{n=2}$ vrcholy 0, 1, 2, 3

00 01 10 11



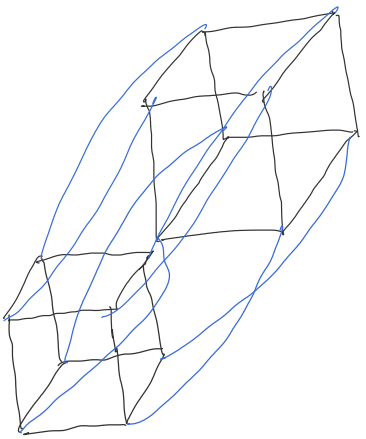
$\boxed{n=3}$: vrcholy 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

000 001 010 011 100 101 110 111



n=4

0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
1000	1000	1010	1011	1100	1101	1110	1111



Přednáška 15

čtvrtek 4. května 2023 10:57

Přednáška 16

čtvrtek 4. května 2023 10:58

Problém: chceme „propojit" n vrcholů (získat souvislý graf) co nejlevněji

Def. Graf G spolu se zobrazením $c: E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ nazveme ohodnoceným grafem (G, c).

Kostru K grafu (souvislého) G nazveme minimální kostrou. pokud má mezi všemi kostrami graf G nejnižší cenu.

nejnižší $\sum_{e \in E(K)} c(e)$

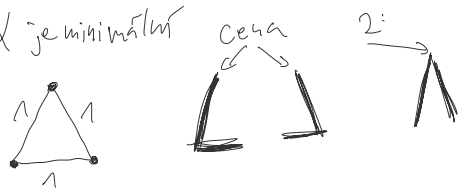
Tvrzení: Každý odhad souv. graf G má min. kostru.

Důkaz: G souvislý, tedy G má kostru (nějakou)

$\mathcal{K}$:= množina všech koster gr. G.
(neprázdná, konečná)

Některá z koster $K \in \mathcal{K}$ je minimální

Nemusí být jediná:



Ohodnocený graf G zadaný maticí cen $V = \{1,2,3,4,5\}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \_ & 1 & 3 & 2 & \_ \\ 2 & 1 & \_ & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & \_ & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & \_ & \_ \\ 5 & \_ & 5 & 4 & \_ & \_ \end{array}$$

Kruskal: (1956)

hrana	$\{1,2\}$	$\{3,4\}$	$\{1,4\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{3,5\}$	$\{2,5\}$	$\{2,4\}$
cena	1	1	2	3	3	4	5	6
vkostře	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✗	✗

nejuzavřeli bychom kružnici

komponenty souvislosti

KS: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$

$\{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$

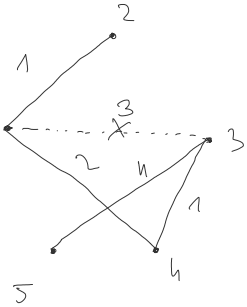
$\{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}$

$\{1,2,3,4\}, \{5\}$

$\{1,2,3,4,5\}$

cena: $1+1+2+4 = 8$

disjointset, union find



Jarník (Prim)

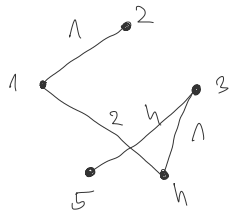
1930 1957

Bere semínko (seed)
(vrchol 1)

Vrcholy	1	2	3	4	5
	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$S = \{1\} \to S = \{1,2\}$

(vrchol 1)



Vrcholy	1	2	3	4	5
	0	+∞	+∞	+∞	+∞
(1)		1	3	2	+∞
(2)			3		5
(4)			1		
(3)					4

$S = \{1\} \rightarrow S = \{1,2\}$

Obecnější postup

Vstup: oh. souv. graf $G = (V, E)$

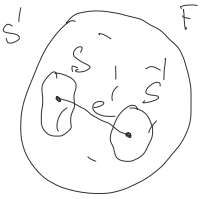
Výstup: hrany min. kostry $K = (V, L)$

krok 1: $F := (V, \emptyset)$

krok 2: Pokud F ještě není kostrou G

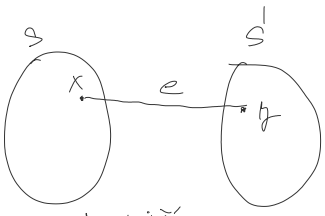
vybereme lib. $x \xrightarrow{e} y$, kt. vede mezi různými KS $F: (S a S')$

e je nejlevnější „hrana" z S nebo z S'



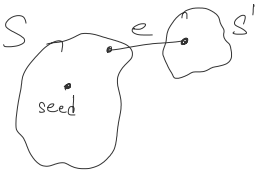
Jak zjistit

kruskalův

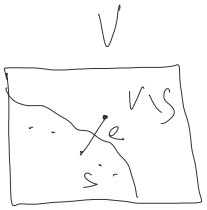


nejlevnější hrana z S & z S'

Jarníkův Primův



e nejlevnější hran z S



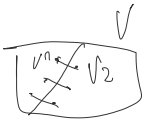
Cut & paste lemma

(G, c) ohodnocený, souvislý.

(V_1, V_2) rozklad V.

$V_1 \cup V_2 = V$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$



řez

$$[V_1, V_2] = \{x \xrightarrow{e} y \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

Pak ex. min. kostra gr. G obs. e

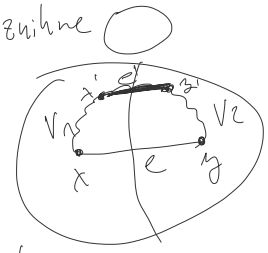
Ať $e \in [V_1, V_2]$ je nejlevnější $c(e) \leq c(e')$ $\forall e' \in [V_1, V_2]$

Dk. vezmeme min kostru K

$e \in K$? ano → V

ne ↓

přidám e do K

vznikne 

odstraníme e'

získáme K^*

1. vznikne kostra K^*

2. K^* je min kostra

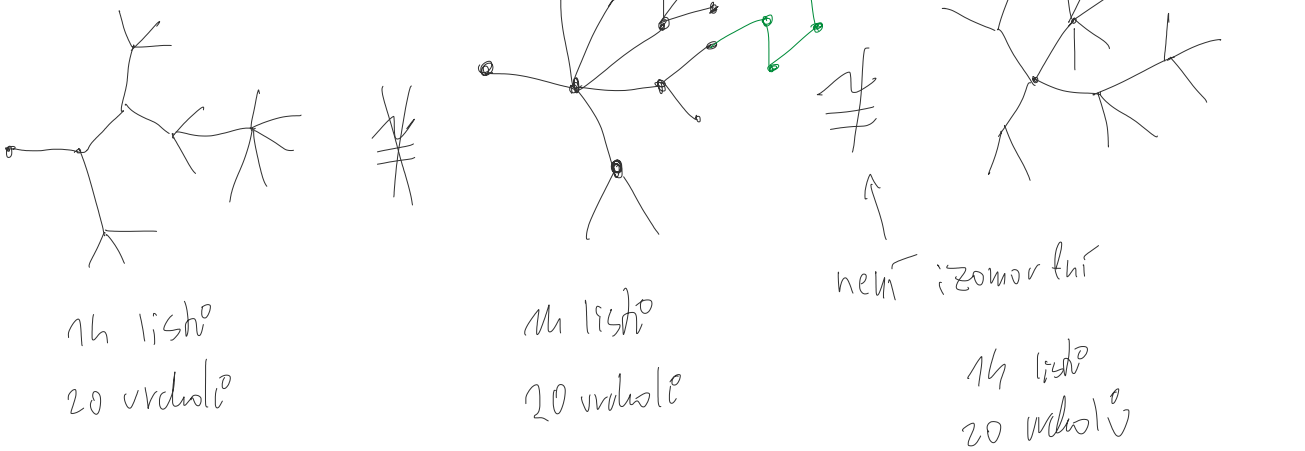
Cvičení 10

čtvrtek 4. května 2023 12:48

T strom ... 2 vrcholy st. 3
3 vrcholy st. 4
1 vrchol st. 6
} každý další vrchol
nová stupeň ≥ 3

a) Existuje takový strom? Je jich (neisomorfních) více?

b) kolik může mít (má listů (vrcholů)?



14 listů
20 vrcholů

14 listů
20 vrcholů

14 listů
20 vrcholů

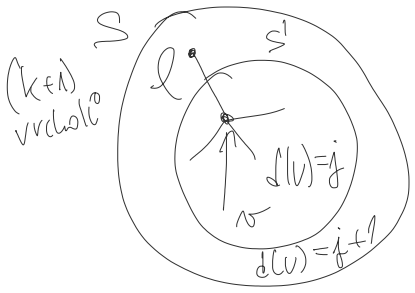
G má n vrcholů
n_1 .... # vrcholů stupně 1 (# listů)
n_i .... # vrcholů stupně i

$$n_1 = \sum_i n_i$$

(*) $n_1 = 0 \cdot n_2 + 1 \cdot n_3 + 2 \cdot n_4 + \dots$

+2

IP Pro vš. stromy o k vrcholech platí (*) ✓
Ať s je strom o (k+1) vrcholech. Platí pro něj (*)?



S' má k vrcholů

S má o jeden list více než S'

S má o jeden vrchol stupně j+1 více

S má o jeden vrchol stupně j méně

Pravá strana: přibyde se $(j+1)-2$

odebere se $j-2$

přibyde se $1 = (j+1)-2-(j-2)$

LS: $+1$

Nasycené uhlovodíky (saturated carbohydrates)

uhlíků $2n+2$ vodíků

#vodíků ... n_1

#uhlíků ... n_3

$n_1 = 2 + 0n_2 + 1n_3 + 2n_4$

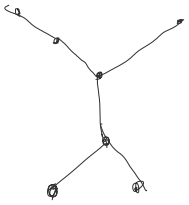
$n_1 = 2n_3 + 2$

Strom o n vrcholech ($\overset{n-1}{=}$ hran)

$\sum_{v \in V} d(v) = \sum 2(k-1) = 2n-2$

k čísel kladných, jejich součet je $2n-2$

$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$



$\Sigma \underbrace{(3,3,2,1,1,1,1)}$ $(4,2,2,1,1,1,1)$

lze vždy z této posloupnosti zkonstruovat strom?

$$\sum_{v \in V} d(v) = \boxed{n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + \Delta \cdot n_\Delta = 2n-2 = 2(n_1+n_2+\dots+n_\Delta)-2}$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_\Delta$$

2 čísla, $\Sigma = 2$ $(1,1)$

$\forall$ posloupnosti o k číslech ex. strom

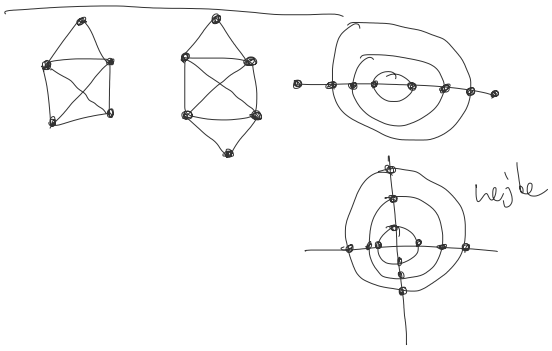
$(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$ $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1)-2$

$\boxed{\text{NDCV}}$ pro toto tvrzení, je jakýkoliv graf takto sestrojený nutně strom?

Přednáška 17

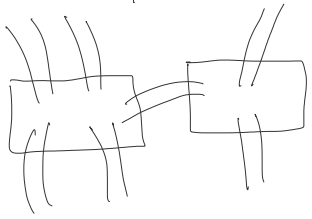
úterý 9. května 2023 11:03

Kreslení jedním tahem

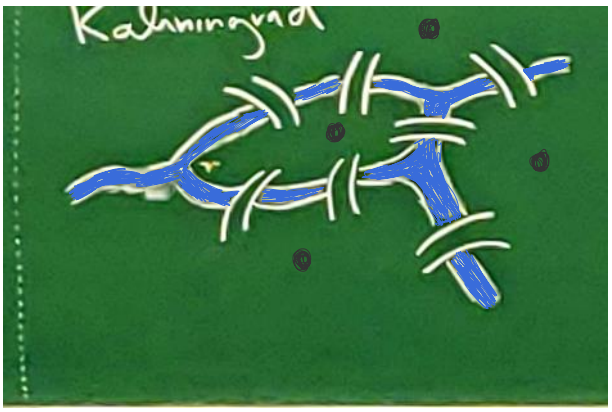


Královec / Königsberg / Kaliningrad

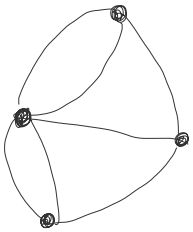
7 mostů



Leonhard Euler (1736)



převedeme na grafový problém



Def Nechť G je graf

Eulerovský tah v grafu G je tah obsahující všechny hrany a všechny vrcholy grafu G.

Pozn. V eulerovském tahu se vyskytuje každá hrana právě jednou.

Def. Graf je eulerovský, pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

× není eulerovský graf (není uzavřený) je eulerovský tah

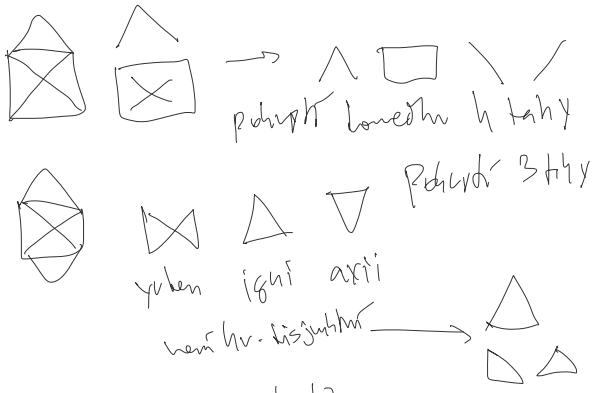
Důkaz věty: Souvislý graf je eulerovský právě tehdy, pokud má každý vrchol sudý stupeň.

Euler: eulerovský → sudý

Pokračování

Pokrytí

Def. Pokrytím grafu G nazveme takový rozklad $\{E_i \subseteq E \mid i = 1, \dots, k\}$ jeho množiny hran, v němž každá E_i je množina hran nějakého tahu v G.



Pokrytí G s nejmenším k nazveme minimálním pokrytím.

Lemma (rozklad na kružnice):
V souvislém grafu G mají vš. vrcholy sudý stupeň iff lze jeho mn. hran „rozložit na kružnice"
(ex. rozklad: každá třída E_i tvoří kružnici.)

Důkaz: „$\longleftarrow$" G souvislý, lze rozložit na kružnice
(G vznikne sjednocením kružnic $K_1, \dots, K_n$ (kružnice nemají společné hrany))
každý vrchol $v \in V$ je obsažen v pr kružnicích

Tedy $d(v) = 2 \cdot pr$ je sudé číslo

„$\longrightarrow$" G souvislý, vš. vrcholy mají sudý stupeň.
Lze G rozložit na kružnice.

Vybereme $v \in V$, tvoříme z něj tah, dokud se v něm nezopakuje nějaký vrchol.

Vybereme vzniklou kružnici a odstraníme její hrany. V nově vzniklém grafu mají vš vrcholy sudý stupeň. (vždy stupeň snížíme o 2)

vždy se dostaneme někam dále, protože všechny vrcholy mají sudý stupeň (nedostaneme se do slepé uličky)

Rozpadá se na komponenty souvislosti — triviální – izolované vrcholy sudého stupně
netriviální – souvislé grafy, mají menší počet hran.

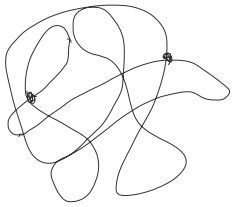
Postup opakujeme.

Věta (charakterisace eulerovských grafů)
... iff ... každý vrchol sudý stupeň.

Věta (charakterisace eulerovských grafů)

Souvislý graf G je eulerovský iff v něm má každý vrchol sudý stupeň.

Důkaz „$\longrightarrow$" Triviální.



„$\longleftarrow$" G souvislý, $d(v)$ sudé pro vš. $v \in V$.

Označme jako T uzavřený tah v G maximální délky.

Pokrývá T celý graf G?

Ano: Pak T je eulerovský tah, G je eulerovský graf

Ne: Ať G' je G bez hran z tahu T. G' je „sudý" a obsahuje nějaké hrany. G byl souvislý $\rightarrow$ ex. $u \in T$, ze kterého vede hrana v G'. Daná hrana leží v nějaké kružnici. Rozpojením T a přidáním O vznikne delší tah $\perp$

Cvičení 11

úterý 9. května 2023 12:48

G_1 •

G_2

G_3

G_{n+1} :

Jaký je počet
→ vrcholů grafu G_n?
→ hran

Pro která n je
G_n eulerovský?

Lze G_5 nakreslit jedním (vz.) tahem?

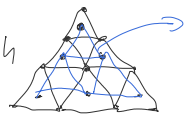
$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$
$$+ \quad S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$
$$2S =$$

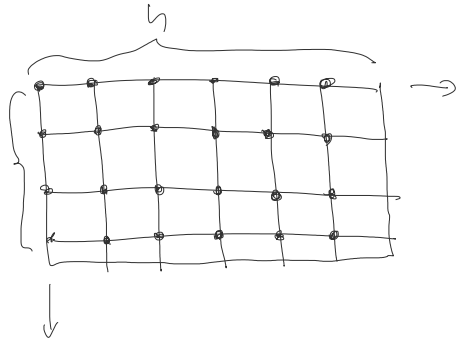
počet vrcholů: $2S = n(n+1)$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

počet hran:

$$e_{n+1} = e_n + 3n$$
$$e_1 = 0$$

Lidově: G_4  $3 \cdot$ # vrcholů v G_3

$G_{m,n}$ 

vrcholů v $G_{m,n}$? → $m \cdot n$

hran v $G_{m,n}$? → $(m-1)n + (n-1)m$ je sudý

(eul.)

Lze $G_{m,n}$ nakreslit jedním tahem?

Lze $G_{m,n}$ nakreslit jedním tahem?

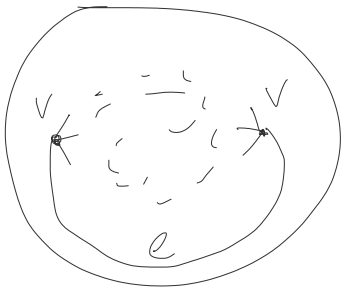
$m=1, n=1 \rightarrow$ lze $m=4, n=2 \rightarrow$ nelze nakreslit jedním uzavřeným tahem

? otevřeným?

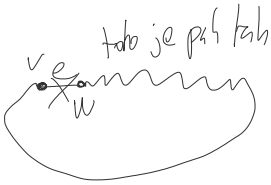
$m=1$ $n=1$
$m=2$ $n=2$ → eulerovské grafy

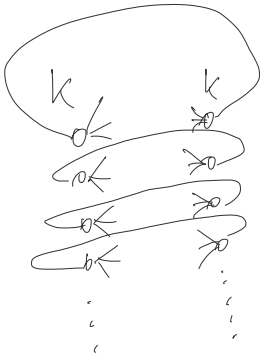
Nakreslit 1 ot. tahem iff právě 2 vrcholy lichého stupně a je souvislý.

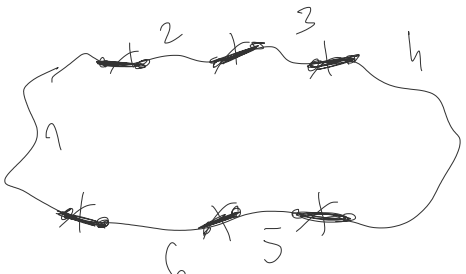
G souvislý



po přidání e je eulerovský tah



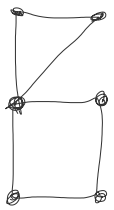




tahů

∃ eulerovský graf, který má sudý počet vrcholů, lichý počet hran?

lze, např.



∄ graf s lichým počtem vrcholů, lichým počtem hran

eulerovský graf, bipartitní, sudý počet vrcholů, lichý počet hran
nelze, musíme vždy mít hrany po dvojicích mezi dvěma různými

Přednáška 18

pondělí 15. května 2023 11:02

Barevnost a nezávislost

→ má n vrcholů →
→ vždy stačí n barev

Definice

Nechť B je nějaká konečná množina (tzv. množina barev). Obarvení vrcholů grafu $G = (V,E)$ je zobrazení $s: V \to B$ takové, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu. Tj. když je $e=\{u,v\} \in E$, pak $h(u) \neq h(v)$

$V \xrightarrow{h} B$ obarvení

$u - v \Rightarrow h(u) \neq h(v)$

k-barevný graf → kolika barvami jsme schopni obarvit

barevnost grafu $\chi(G)$ ... barevnost grafu G

nejmenší počet barev.

$\chi(G) = 3$ chromatické číslo

χ čéka

$\chi(K_n) = n$

$\chi(K_5) = 5$

klika

klikovost → $\omega(G) = 3$

každé 2 různé vrcholy → z množiny K jsou spojeny hranou a K je max. podmnožina

Klikovost grafu je počet vrcholů v největší klice

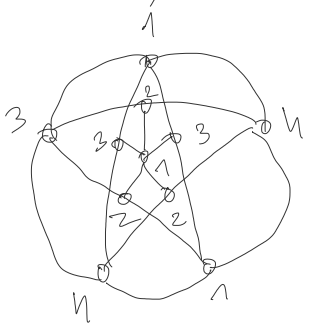
Tvrzení: pro libovolný graf G platí:

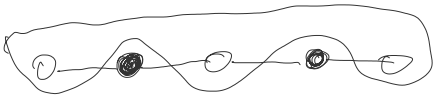
$\omega(G) \leq \chi(G)$

$\omega(G) \le \chi(G)$

Obecně
$\omega(G) \neq \chi(G)$

neobsahuje △, barevnost má 4





G

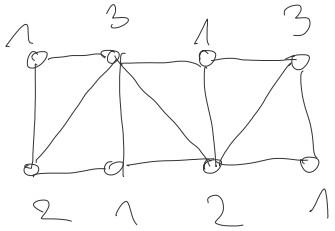
o x o x o

nezávislost G .... $\alpha(G) = 3$

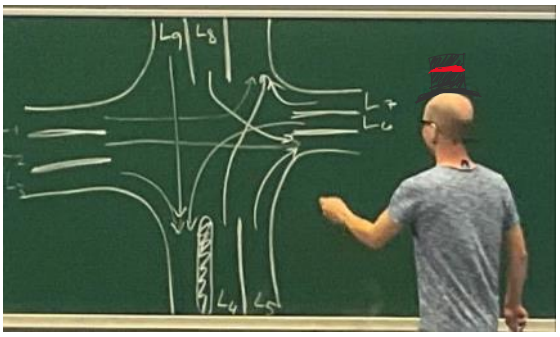
↓

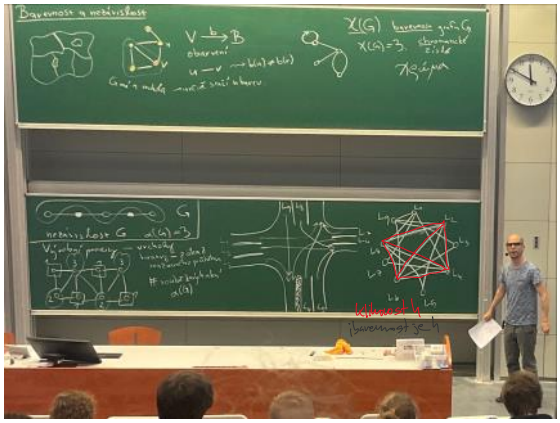
max. nezávislá množina
↳ vždy diskrétní

Výrobní procesy – vrcholy hrany – zákaz současného průběhu



souřadných akcí ...
$\alpha(G)$





G ... n vrcholů

1) $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq n$ — extremální případy

G lze obarvit $\chi(G)$ barvami

Množina vrcholů stejné barvy je nezávislá

Obsahuje max. $\alpha(G)$ vrcholů.

$\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq n$

2) $\alpha(G) + \chi(G) \leq n+1$

N nejpočetnější nez. množina (má $\alpha(G)$... prvků)

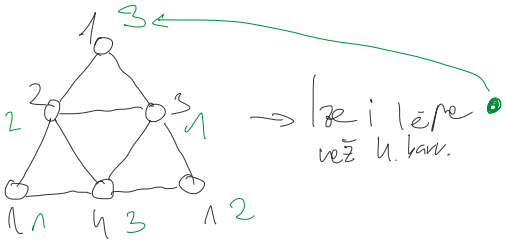
Obarvíme N 1 barvou

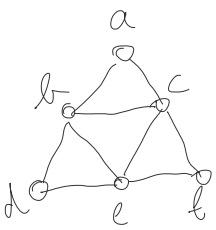
Bez N zbývá $n - \alpha(G)$ k nabarvení, k tomu

potřebujeme nejvýše $(n - \alpha(G))$ barev

↳ celkově barev $n - \alpha(G) \geq \chi(G)$

$n+1 \geq \alpha(G) + \chi(G)$





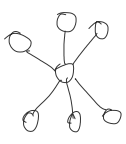
(a, c, d, b, e, f)

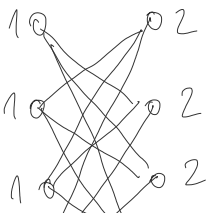
a	1
c	2
d	1
b	1
e	3
f	4

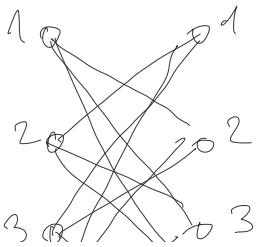
Graf G s max. stupněm $\Delta(G)$

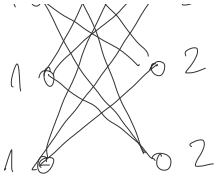
sekvenční barvení

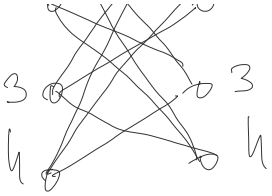
obarvíme max $\Delta(G)+1$ barvami





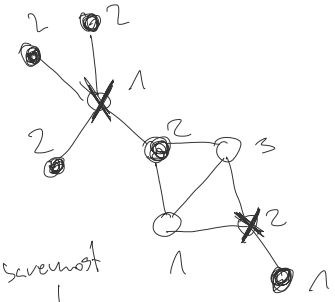


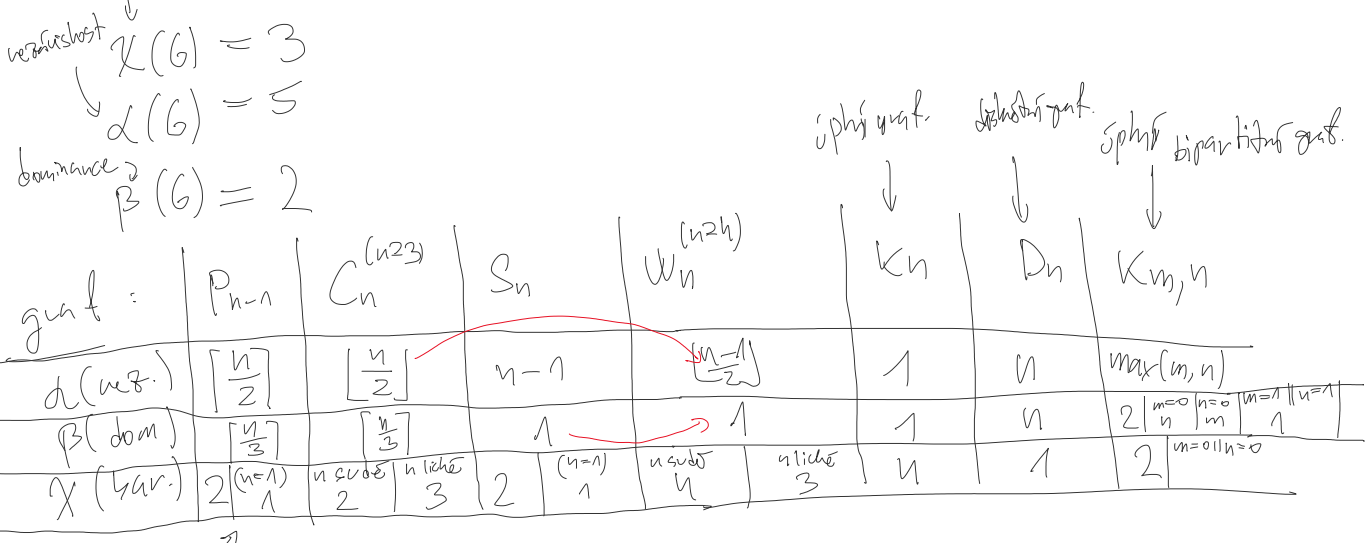

1
2
1
2

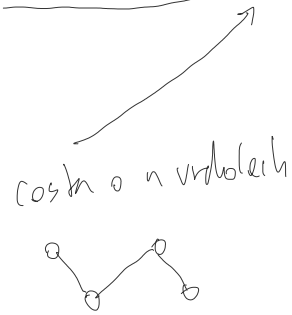

3
3
4
4

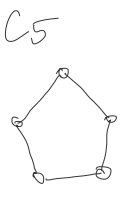
Cvičení 12

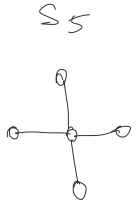
pondělí 15. května 2023 12:47

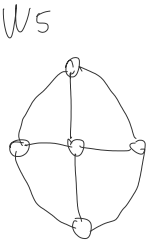






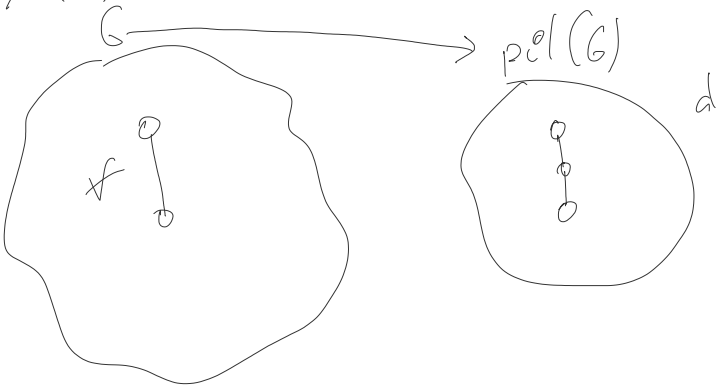






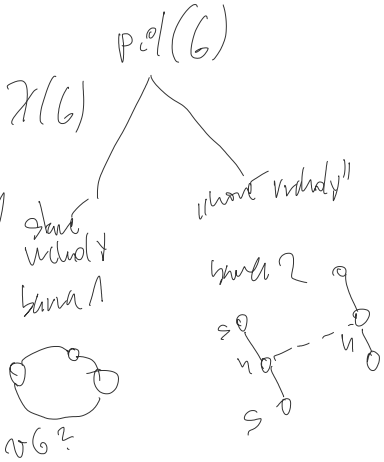
$P_3 = P_{n-1}$

$\chi(G) = n$. $\chi(pol(G)) = ? \boxed{2} \leq n+1$ → větší



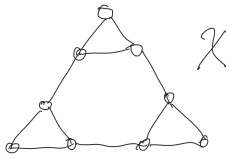
de když $\chi(G) \geq 3$ tak $\chi(pol(G)) \leq \chi(G)$

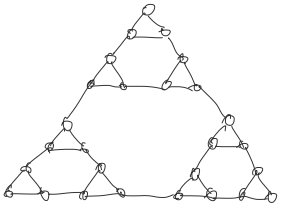
když $\chi(G) = 1 \ldots \chi(pol(G)) = 1$



G_1 ○ $\chi(G_1) = 1$

G_2 △ $\chi(G_2) = 3$

G_3  $\chi(G_3)=3$

G_4 

$\chi(G_4)=2 = \begin{cases} 3 \\ 1 \ (n=1) \end{cases}$

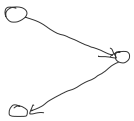
$3^{n-2} \geq \alpha(G_n) \geq$ 3^{n-2}, $1 \ldots n=1$

$3^{n-2} \geq \beta(G_n) = 2$

G_{n+1}

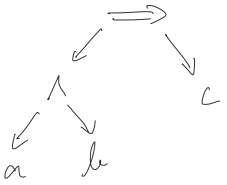
Přednáška 19

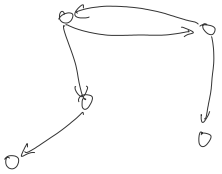
úterý 16. května 2023 12:47

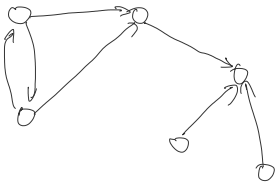


Orientované grafy

$(a|b) \Rightarrow c$





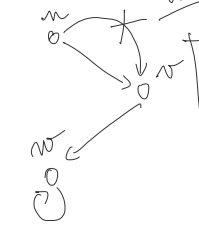


Orientovaný graf

V ... vrcholy $E \subseteq V \times V$

= hrany bin. relace na mn. vrcholů

$\{u, v, w\}$ $E = \{(u,v), (v,w), (w,w)\}$ (pohled 1)



V ... vrcholy E ... hrany

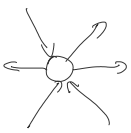
$E \xrightarrow{\varepsilon} V \times V$

$V = \{u, v, w\}$ $E = \{a, b, c, d\}$

$\varepsilon(a) = (u, v)$ $\varepsilon(c) = (w, w)$

$\varepsilon(b) = (v, w)$ $\varepsilon(d) = (u, v)$

(pohled 2)



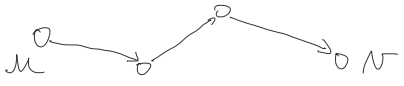
$d_{out}(v)$ ... # počet hran vycházejících z v

$d_{in}(v)$ ... # počet hran vcházejících do v

$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ ... hrany

$\sum_{v \in V} d_{out}(v) = |E|$

$\sum_{v \in V} d_{in}(v)$



$v_0 \overset{e_1}{\text{———}} v_1$

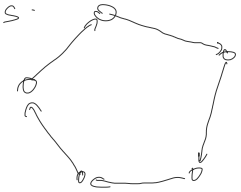
$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$

$e_1 = (v_0, v_1)$

$e_i = (v_{i-1}, v_i)$

cyklus:

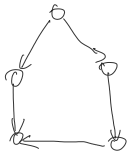
C5



„cycle" ... kružnice

$\|$ $\|$ $\times$

„oriented cycle?" cyklus



Dostupnost

$x \sim y$ ... x a y dostupné, pokud ex. cesta z x do y.

Orientovaná dostupnost

y dostupné z x ... $x \rightsquigarrow y$

ex. or. cesta z x do y

grafy-orientovane

Teorie grafů

Orientované grafy

Obsah

Orientované grafy
- Stupně vrcholů, orientované tahy a cesty
- Eulerovské orientované grafy
- Kořenové stromy

Acyklické grafy
- Topologické očíslování vrcholů
- Jádro grafu

Orientované grafy

Definice č. 1
Orientovaný graf G je dvojice (V, E), kde

- V je neprázdná konečná množina, prvky nazýváme *vrcholy*,
- $E \subseteq V \times V$ je množina (některých) uspořádaných dvojic prvků z množiny V, její prvky nazýváme *orientované hrany*.

Pokud $e = (u, v)$ je hrana, říkáme, že u je počáteční vrchol, v je koncový vrchol hrany e a že hrana e je incidentní s vrcholy u, v.
Hranu $e = (u, v)$ někdy značíme jen $e = uv$.
Hrana $e = (v, v)$ se nazývá *smyčka*, hrany $e_1 = (u, v)$ a $e_2 = (v, u)$ jsou *antiparalelní hrany*.

Orientované grafy

Definice č. 2
Orientovaný graf G je trojice (V, E, ε), kde

- V je neprázdná konečná množina *vrcholů*,
- E je konečná množina *orientovaných hran*,
- ε je přiřazení, které každé hraně $e \in E$ přiřazuje uspořádanou dvojici (u, v), kde $u, v \in V$, a nazývá se *vztah incidence*.

Tato definice dovoluje i paralelní hrany a rozlišuje je jmény hran.

Orientované grafy

Úmluva
Všimněme si, že definice č. 1 dovoluje smyčky, a z pohledu definice č. 2 vymezuje prosté orientované grafy.
Nebude-li řečeno jinak, budeme používat definici č. 1 a orientovaný graf pro nás bude prostý orientovaný graf, tedy dvojice $G = (V, E)$.

Poznámka
Prostý orientovaný graf $G = (V, E)$ lze ztotožnit s binární relací na množině V.

Orientované grafy

Definice
Nechť G je orienovaný graf obsahující vrchol v.
Vstupní stupeň vrcholu v je počet hran s koncovým vrcholem v, značí se $d_{in}(v)$, anebo $\deg_{in}(v)$ nebo $d^-(v)$.
Výstupní stupeň vrcholu v je počet hran s počátečním vrcholem v, značí se $d_{out}(v)$, anebo $\deg_{out}(v)$ nebo $d^+(v)$.
Stupeň vrcholu v je pak $d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$.

Lemma
Pro každý graf G platí $\sum_{v \in V} d_{in}(v) = |E| = \sum_{v \in V} d_{out}(v)$.

Orientované grafy

Definice

- *Orientovaný sled* (délky k) v grafu G je posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ taková, že hrana $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$.
  Jestliže $v_0 = v_k$, pak se jedná o *uzavřený orientovaný sled*.
- *Orientovaný tah* v grafu G je orientovaný sled, ve kterém se neopakují hrany.
- *Orientovaná cesta* v grafu G je orientovaný tah, ve kterém se neopakují vrcholy.
- Cyklus v grafu G je uzavřený orientovaný tah s alespoň jednou hranou, ve kterém se neopakují vnitřní vrcholy.

Orientované grafy

Poznámky
1) Orientovaná cesta či cyklus v grafu určují podgraf grafu G, neboť se v nich neopakují vrcholy ani hrany. Budeme s těmito pojmy pracovat opět podle potřeby buď jako s posloupností vrcholů a hran, nebo jako s podgrafem skládajícím se z těchto vrcholů a hran.
2) V orientovaném grafu mají svůj význam i původní neorientované pojmy sled, tah, cesta (kde každá hrana e_i je incidentní s vrcholy v_{i-1} a v_i, přičemž nezáleží na tom, zda je hrana orientovaná po směru, anebo proti směru sledu, tahu, cesty).

Orientované grafy

Lemma (o zkrácení na orientovanou cestu)
Pokud v grafu G existuje orientovaný sled z vrcholu u do vrcholu v, pak v něm existuje i orientovaná cesta z u do v, která není delší než daný orientovaný sled.

Důsledek: Uzavřený orientovaný (netriviální) sled obsahuje cyklus.

Definice
Vrchol v je *orientovaně dostupný* z vrcholu u, pokud v grafu G existuje orientovaná cesta z vrcholu u do vrcholu v.

Poznámka
Relace orientované dostupnosti je reflexivní a transitivní, ale nemusí být symetrická.

Reflexivní V
Symetrie X
Transitivní $x \to y$ & $y \to z$
$x \to z$

Orientované grafy

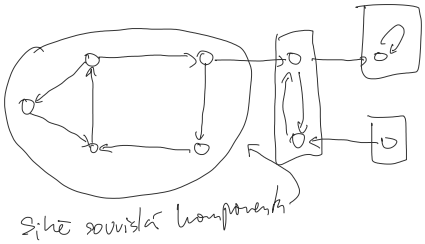
Definice
Graf G je *silně souvislý*, pokud pro každé dva jeho vrcholy u, v existuje orientovaná cesta z u do v (a tudíž i zpět).

Definice
Každý maximální podgraf grafu G, který je silně souvislý, se nazývá *komponenta silné souvislosti* grafu G.

Poznámka
Komponenta silné souvislosti je jednoznačně určena množinou svých vrcholů, je to podgraf indukovaný danou množinou vrcholů.

Silná souvislost

G silně souvislý
$\forall u, v \in V \ \exists$ or. cesta $u \rightsquigarrow v$



Silně souvislá komponenta

Eulerovské orientované grafy

Definice
Eulerovský tah v orientovaném grafu G je orientovaný tah, který obsahuje všechny hrany (každou jednou) a všechny vrcholy grafu.

Definice
Orientovaný graf, ve kterém existuje uzavřený eulerovský tah, se nazývá *eulerovský orientovaný graf*.

Tvrzení
Orientovaný graf je eulerovský, právě když je souvislý a pro každý jeho vrchol platí: $d_{in}(v) = d_{out}(v)$

Eulerovské orientované grafy

Tvrzení
Orientovaný graf obsahuje otevřený eulerovský tah, právě když je souvislý a existují v něm dva vrcholy v a w, pro které platí $d_{out}(v) = d_{in}(v) + 1$, $d_{in}(w) = d_{out}(w) + 1$, přičemž všechny ostatní vrcholy splňují $d_{in}(u) = d_{out}(u)$.

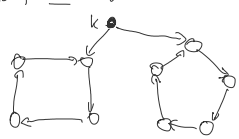
Poznámka
Pro hledání eulerovského tahu v orientovaném grafu funguje stejný algoritmus jako v neorientovaném grafu, pouze hrany musíme do tahu přidávat po směru.

Kořenové stromy

Definice
Kořen orientovaného grafu je vrchol, z něhož vede orientovaná cesta do každého vrcholu grafu.

Tvrzení
Orientovaný graf je silně souvislý, právě když každý jeho vrchol je kořenem.

Kořen $k \in V$ $\quad \forall v \in V \ \exists$ or. cesta $k \rightsquigarrow v$

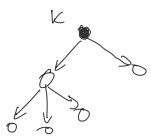


G má kořen k

H neobsahuje kořen

všechny vrcholy kořenem:

Kořenový strom s kořenem (or. graf)



K kořenový strom
$k \neq k'$ kořeny
$k \rightsquigarrow k'$ ... vznikla by množina v K
ale K je strom $\perp$

Kořenové stromy

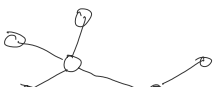
Definice
Orientovaný graf je *kořenový strom*, pokud je to strom a má kořen.

Tvrzení
Kořenový strom má jen jeden kořen. Navíc v kořenovém stromě je kořen jediným vrcholem, který má $d_{in}(v) = 0$.

Poznámka
Pojem strom je neorientovaný - vyžaduje (slabou) souvislost a neexistenci kružnic. Pozor na anglickou a českou terminologii:

- acyclic graph = graf bez kružnic
- directed acyclic graph = (orientovaný) acyklický graf

Kořenové stromy

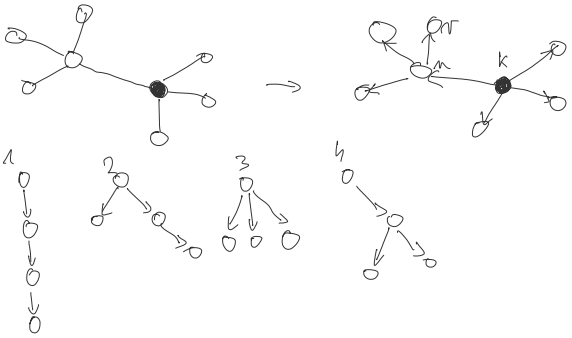


Kořenové stromy

Poznámka
Termín kořenový strom se používá i u neorientovaných stromů, znamená strom s vyznačeným vrcholem (orientace je implicitně míněna od kořene k listům). Takto lze každý strom jednoznačně zakořenit v libovolném vrcholu.

Hloubka (výška) stromu je délka nejdelší cesty od kořene k listu.

Příklad
Existují čtyři neisomorfní kořenové stromy o čtyřech vrcholech.

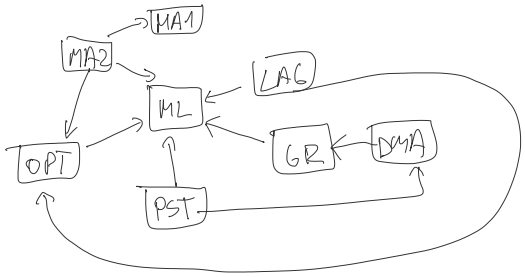


Acyklické grafy

Definice
Orientovaný graf je *acyklický*, jestliže neobsahuje žádný cyklus.

Tvrzení
V acyklickém grafu je aspoň jeden vrchol s $d_{in}(v) = 0$ (tzv. zdroj) a aspoň jeden vrchol s $d_{out}(v) = 0$ (tzv. výlevka).

Acyklické grafy
ov. grafy neobsahující cykly
(DAG – directed acyclic graphs)



Acyklické grafy

Definice
Očíslování vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ orientovaného grafu G se nazývá *topologické očíslování vrcholů*, jestliže pro každou hranu $e = (v_i, v_j)$ platí $i < j$, tj. počáteční vrchol má menší číslo než koncový vrchol.

Tvrzení
Orientovaný graf je acyklický, právě když má topologické očíslování vrcholů.

Acyklické grafy

Algoritmus na topologické očíslování vrcholů
Vstup: acyklický orientovaný graf $G = (V, E)$
Výstup: topologické očíslování vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$

Myšlenka algoritmu: Očísluje nejmenším možným číslem vrchol v se vstupním stupněm $d_{in}(v) = 0$ a utrhne ho z grafu (samozřejmě i s hranami). Graf $G - v$ je opět acyklický, postup můžeme opakovat, dokud nejsou očíslovány všechny vrcholy.

Přitom trhání vrcholu nemusíme dělat v datové struktuře grafu G, stačí pouze aktualizovat vstupní stupně vrcholů.

Acyklické grafy

Algoritmus na topologické očíslování vrcholů

1. Spočítáme vstupní stupně $d_{in}(v)$ pro všechny $v \in V$.
2. Položíme $M := \{v \mid d_{in}(v) = 0\}$, $i := 1$.
3. Dokud $M \neq \emptyset$ opakujeme:
   - Vybereme nějaký $v \in M$ a odstraníme ho z M.
     Položíme $v_i := v$, $i := i + 1$.
   - Pro každou hranu $e = (v, w)$ s počátečním vrcholem v provedeme:
     - $d_{in}(w) \leftarrow d_{in}(w) - 1$,
     - když $d_{in}(w) = 0$, tak přidáme w do M.
4. Topologické očíslování vrcholů je $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Acyklické grafy

Korektnost algoritmu

- Terminace - variant = počet očíslovaných vrcholů.
  (Protože všechny podgrafy jsou acyklické, je množina M neprázdná, dokud nejsou očíslovány všechny vrcholy. Přitom v každém kroku je očíslován jeden další vrchol.)
- Parciální korektnost - invariant = "Očíslování je topologickým očíslováním vrcholů podgrafu indukovaného množinou již očíslovaných vrcholů." (Lze dokázat indukcí.)
  Jelikož algoritmus zastaví, až když jsou očíslovány všechny vrcholy, získáme topologické očíslování vrcholů grafu G.

Acyklické grafy

Poznámka

Algoritmus rozpozná nepřípustný vstup - pokud graf G není acyklický, bude množina M prázdná dříve, než budou očíslovány všechny vrcholy.

Použití topologického očíslování vrcholů

Ostré částečné uspořádání $\prec$ na množině V odpovídá acyklickému orientovanému grafu $G = (V, E)$: $(u, v) \in E$, právě když $u \prec v$.
Fakt, že vrcholy acyklického grafu lze topologicky očíslovat, umožňuje dodefinovat porovnání pro všechny dvojice prvků.
Každá částečně uspořádaná množina může být vnořena do lineárně uspořádané množiny.

Acyklické grafy

Algoritmus na topologické očíslování vrcholů

Vstup: Orientovaný graf $G = (V, E)$, kde $n = |V|$, $m = |E|$.
Pro každý vrchol v je zadán seznam $A(v)$
všech hran s počátečním vrcholem v.
Výstup: Topologické očíslování vrcholů $(v_1, v_2 \ldots, v_n)$
nebo hláška, že graf není acyklický.

Datové struktury: Pole D délky n, kde $D(v) = d_{in}(v)$ v podgrafu indukovaném ještě neočíslovanými vrcholy.
Množina M vrcholů se vstupním stupněm nula.

Acyklické grafy

Algoritmus na topologické očíslování vrcholů

(inicializace)
- for all $v \in V$ do $D(v) \leftarrow 0$ enddo
- for all $e = (u, v) \in E$ do $D(v) \leftarrow D(v) + 1$ enddo
- $M \leftarrow \emptyset$
- for all $v \in V$ do if $D(v) = 0$ then $M \leftarrow M \cup \{v\}$ endif enddo
- $i \leftarrow 0$

Acyklické grafy

Algoritmus na topologické očíslování vrcholů

(číslování vrcholů)
- while $M \neq \emptyset$ do
  - vyber $v \in M$ (a očísluj ho a utrhni - viz dále)
  - $i \leftarrow i + 1$, $v_i \leftarrow v$
  - $M \leftarrow M \setminus \{v\}$
  - for all $e = (v, w) \in A(v)$ do
    - $D(w) \leftarrow D(w) - 1$
    - if $D(w) = 0$ then $M \leftarrow M \cup \{w\}$ endif enddo
  - enddo
- if $i = n$ then output $(v_1, v_2 \ldots, v_n)$
  else output "G není acyklický" endif

Acyklické grafy

Časová náročnost algoritmu

Výše uvedený algoritmus na topologické očíslování vrcholů pracuje v čase $O(m + n)$.

Každou hranu zpracujeme jednou při inicializaci pole D a nejvýše jednou při jejím utrhnutí. Representace grafu je volena tak, abychom snadno našli hrany s počátečním vrcholem v, když tento vrchol chceme utrhnout.

Acyklické grafy

Definice

Jádro orientovaného grafu $G = (V, E)$ je množina $J \subseteq V$ jeho vrcholů taková, že

1. mezi libovolnými dvěma vrcholy z J nevede žádná hrana,
2. z každého vrcholu mimo J vede aspoň jedna hrana do J.

Orientovaný graf může mít žádné, jedno či více jader. Např. cyklus délky tři nemá jádro, zatímco cyklus délky čtyři má jádra dvě.

Acyklické grafy

Tvrzení

Acyklický orientovaný graf má jádro a to je určeno jednoznačně.

Algoritmus na hledání jádra

K nalezení jádra lze použít topologické očíslování vrcholů od konce: Poslední vrchol dáme do jádra a vrcholy, ze kterých do něj vede hrana, dáme mimo jádro. To opakujeme, dokud nejsou všechny vrcholy zařazeny do jádra či mimo něj.

Acyklické grafy

Korektnost algoritmu

- Terminace - variant = počet zařazených vrcholů.
  (Při každém kroku je zařazen aspoň jeden další vrchol.)
- Parciální korektnost - invariant = "Aktuální množina J je jádro v podgrafu indukovaném množinou již zařazených vrcholů." (Lze dokázat indukcí.)
  Jelikož algoritmus zastaví, až když jsou zařazeny všechny vrcholy, získáme jádro celého grafu G.

Acyklické grafy

Algoritmus na hledání jádra

Vstup: Acyklický graf $G = (V, E)$, kde $n = |V|$, $m = |E|$.
Pro každý vrchol v je zadán seznam $A(v)$
všech hran s počátečním vrcholem v.
Výstup: Množina J vrcholů jádra grafu.

Datové struktury: Pro každý vrchol v bude seznam $B(v)$ obsahovat všechny hrany s koncovým vrcholem v.
Booleovské pole P délky n označuje, zda může vrchol v být v jádře.

Acyklické grafy

Algoritmus na hledání jádra

(inicializace)
- najdi topologické očíslování vrcholů $(v_1, v_2 \ldots, v_n)$
- for all $e = (v, w) \in E$ do $B(w) \leftarrow B(w) \cup \{v\}$ enddo
- $J \leftarrow \emptyset$
- for all $v \in V$ do $P(v) \leftarrow \mathit{true}$ enddo

(zařazení vrcholů)
- for $i \leftarrow n$ downto 1 do
  - if $P(v_i)$ then
    - $J \leftarrow J \cup \{v_i\}$
    - for all $e = (w, v_i) \in B(v_i)$ do $P(w) \leftarrow \mathit{false}$ enddo endif
  - enddo
- output J

Acyklické grafy

Časová náročnost algoritmu

Výše uvedený algoritmus na hledání jádra acyklického grafu pracuje v čase $O(m + n)$.

Přitom topologické uspořádání vrcholů najdeme v čase $O(m + n)$, rozdělení hran do seznamů podle koncových vrcholů trvá čas $O(m)$, zařazování vrcholů do jádra či mimo jádro vyžaduje čas $O(m + n)$.

Acyklické grafy

Použití jádra orientovaného grafu

Jádro orientovaného grafu se používá v teorii her.

Hru hrají dva hráči a prohraje ten, kdo už nemá další tah. Orientovaný graf pro hru $G = (V, E)$ má za vrcholy situace hry a orientované hrany $e = (S_1, S_2)$ jsou tam, kde ze situace S_1 lze přejít jedním tahem do situace S_2.

Má-li graf jádro, pak existuje neprohrávající strategie a tou je "táhnout vždy do jádra". Pokud je graf acyklický, tak je tato strategie dokonce vyhrávající (s počáteční situací mimo jádro by vyhrál první hráč a naopak).

Orientované grafy

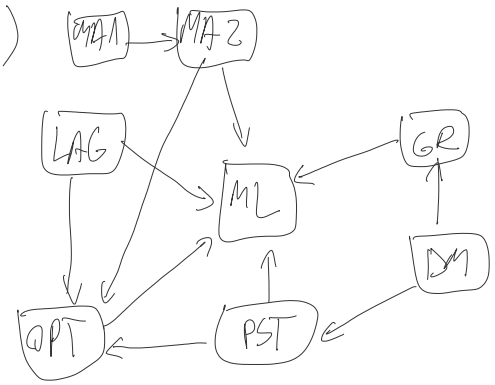
Literatura

- J. Demel: Grafy a jejich aplikace, Academia, 2015.
- J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Nakladatelství Karolinum, 2000.
- M. Dostál: Cvičení k přednášce LGR (najdete v nich důkazy některých tvrzení z přednášky a mnoho dalších příkladů).

Přednáška 20

pondělí 22. května 2023 11:04

Orientované acyklické grafy (DAG)

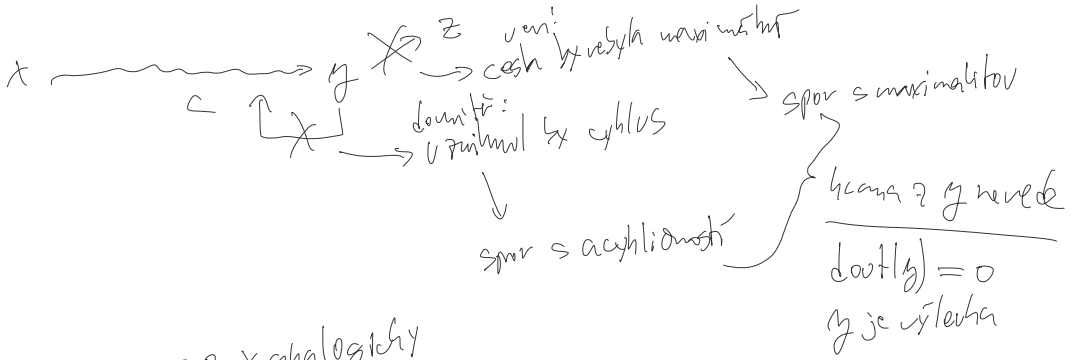


Tvrzení G acyklický graf

V G existuje alespoň jeden zdrojový vrchol v (vrchol v, pro který $d_{in}(v) = 0$) a alespoň jeden výstupní vrchol w (vrchol w, pro který $d_{out}(w) = 0$)

"source" "sink"

Důkaz: Vezmeme v G nějakou maximální orientovanou cestu C (ve smyslu délky)



pro x analogicky x je zdrojový.

Definice topologického očíslování

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ vrcholů

nazýváme topologickým, pokud pro každou hranu

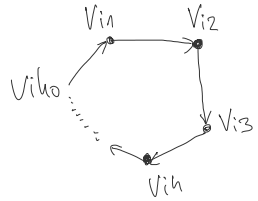
$v_i \longrightarrow v_j$ v G

platí $i < j$

Věta Orientovaný graf G je acyklický, právě tehdy když lze topologicky očíslovat.

Důkaz "$\leftarrow$" G lze top. očíslovat.

Je G acyklický? kdyby G obsahoval cyklus C



$\underbrace{i_1 < i_2 < i_k < i_1}_{i_1 < i_1}$

$\perp$, tedy G je acyklický

"$\longrightarrow$" G acyklický

Lze G top. očíslovat

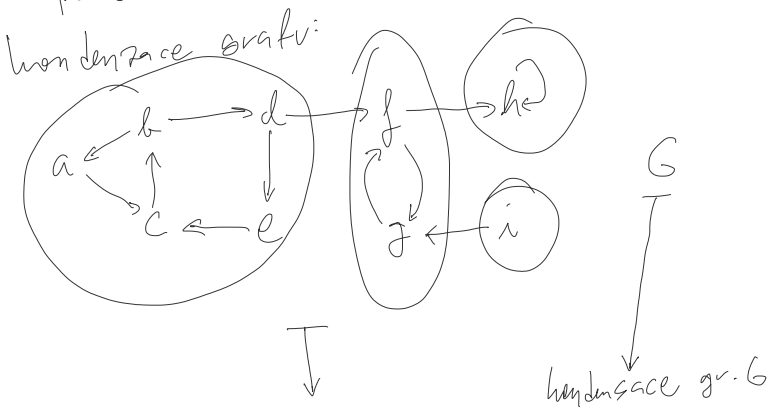
Algoritmus první účtenky:

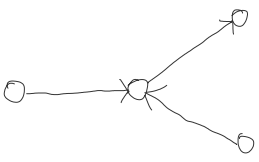
	MA1	
	MA2	✗
	GR	✗
✓	LAG	
	ML	✗✗✗✗✗
	DM	
	OPT	✗✗✗
	PST	✗

1	LAG	1
2	DM	2
3	PST	3
4	GR	4
5	MA1	5
6	MA2	6
7	OPT	7
8	ML	

V každém kroku odstraníme zdroj v (a hrany z něj vedoucí), provedeme update din(w) pro vš. zbývající w.

kondenzace grafu:





Def. $G = (V, E)$ je or. graf

Def. $G = (V, E)$ je or. graf

kondenzace grafu G je or. graf $G_{kon} = (V_{kon}, E_{kon})$

V_{kon} je množina silně souvislých komponent grafu G.

Pro $B_1 \neq B_2$ je v E_{kon} hrana

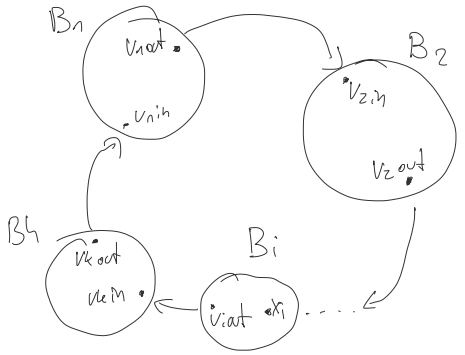
$B_1 \longrightarrow B_2$

$\Leftrightarrow$ v G

právě tehdy, když v E_{ex} hrana

Tvrzení kondenzace jakéhokoliv or. grafu G je acyklický graf.

Důkaz: Mít v kondenzaci cyklus znamená:



$x_i \in B_i$

$x_j \in B_j$

$x_i \rightsquigarrow v_{i\,out} \rightsquigarrow v_{i+1\,in} \quad v_{j\,in} \rightsquigarrow x_j$

Spor (komponenty souvislosti jsou ve skutečnosti součástí jedné velké KS)

$\Downarrow$

kondenzace je acyklický

Algoritmy pro hledání silně souvislých komponent:

s lineární časovou složitostí

$O(|E| + |V|)$

1972 Robert Tarjan – 1 průběh DFS

1978–1981 Kosaraju–Sharir – 2 průběhy DFS

Cvičení 13

pondělí 22. května 2023 13:41

Turnaje

"pecking order" n vrcholů

$(w \neq v)$

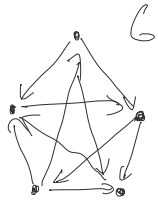
králova: $v \in V$ $\forall w \in V$ buď $v \to w$

císařova: $v \in V$

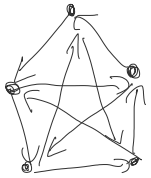
$\mathrm{dout}(v) = n-1$

$v \to \exists u \to w$

G

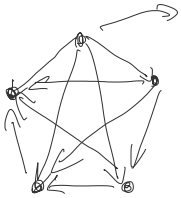


H



obsahuje G, H císařovu? Obsahuje královu?

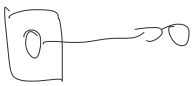
X X



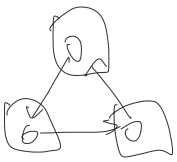
císařova K

K

králova



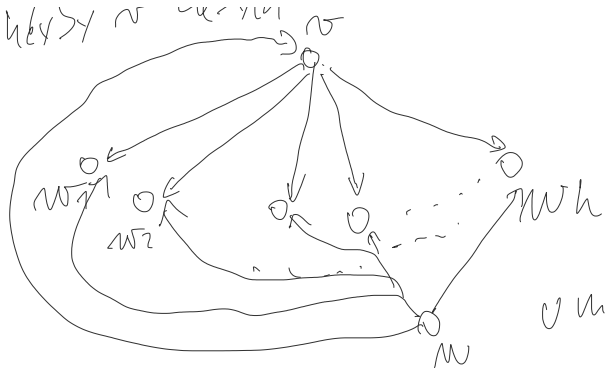
císařova



Je v každém turnaji králova? ← ano

Hypotéza: vrchol v s maximálním stupněm $\mathrm{dout}(v)$ je králova

kdyby v nebyla králova:



u maximální stupeň ⊥

↓

v je králova

NDCV

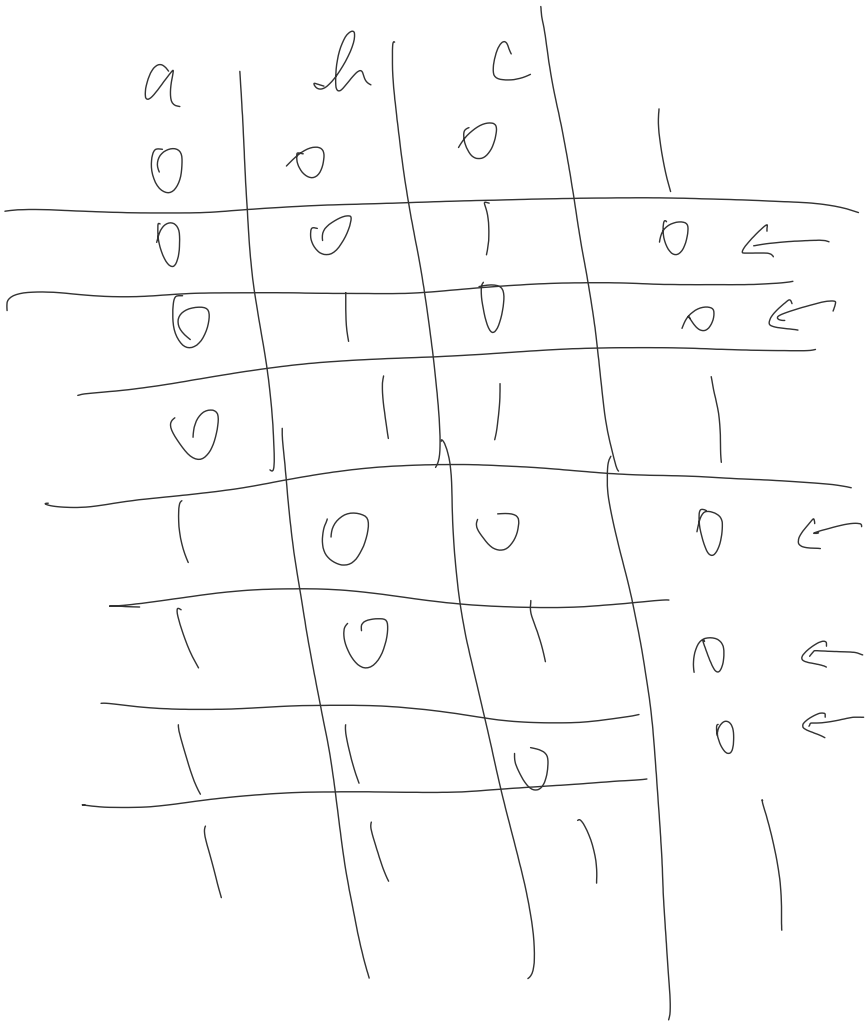
turnaj o alespoň 3 vrcholech obsahuje alespoň 3 královny (iff nemá císařovnu)

Hamiltonovská cesta

projde celým grafem (turnajem)

Hypotéza: každý turnaj obsahuje orientovanou hamiltonovskou cestu

pátek 9. června 2023 16:07



DNF

$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee$

$(\neg a \wedge b \wedge c) \vee$

$(a \wedge b \wedge c)$

$(\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge$