V každé úloze 1. – 4. označte své odpovědi postupně podle zadání A, B, C, D, pište je na stejnou stránku pod zadání nebo na rub archu a oddělte je vhodně opticky, např. pomocí zvýrazněné čáry apod. Případné pomocné výpočty pište na jiný arch, který také podepište a odevzdejte. Pokud můžete, pište tiskacím písmem.
Každá úloha 1. – 4. je hodnocena 0 – 4 body, přitom každá z odpovědí na otázky A, B, C, D přispívá do tohoto počtu nejvýše 1 bodem. Při neúplné nebo nejasné odpovědi přihlíží zkoušející také k celkovému charakteru ostatních odpovědí.

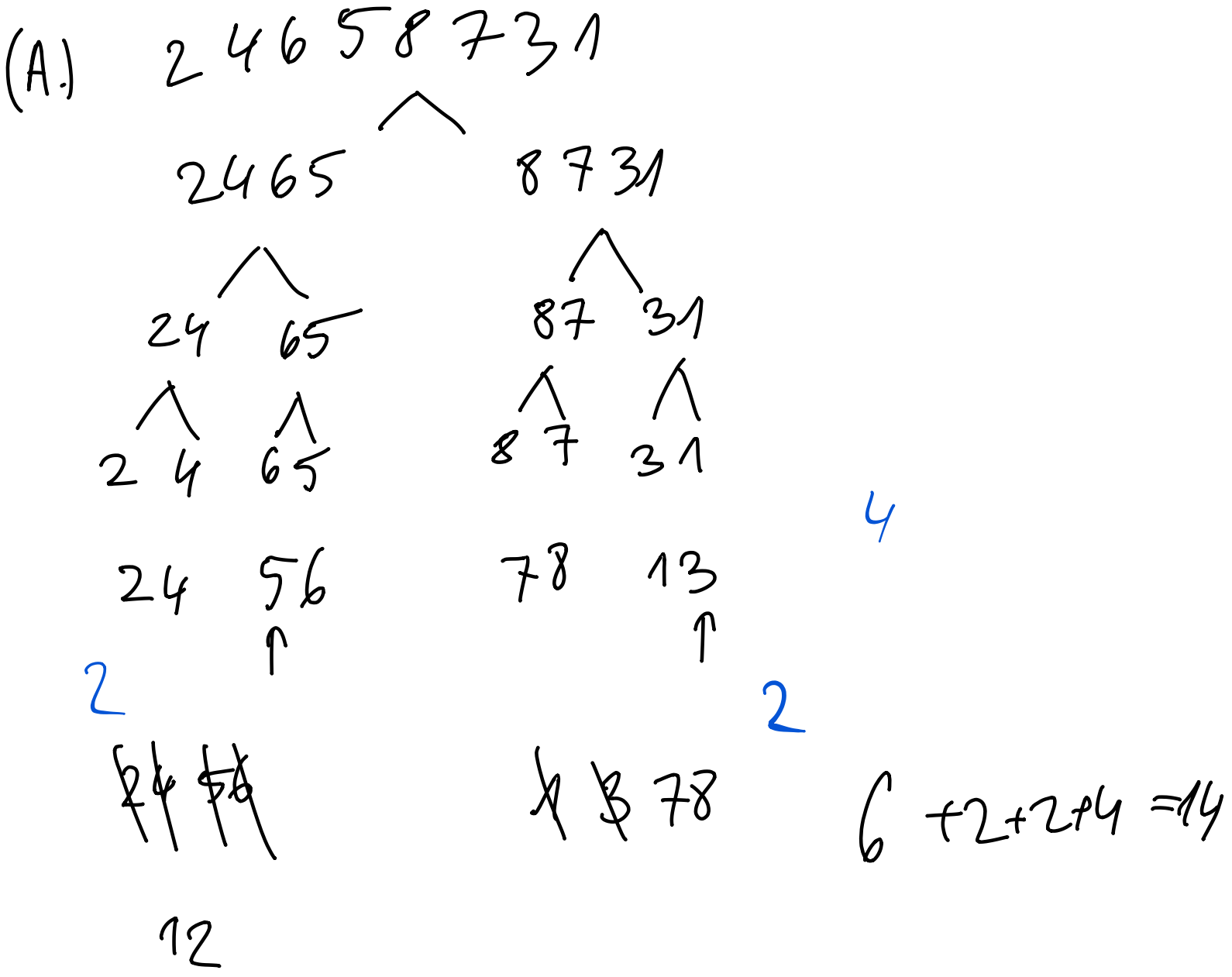
1. Řazení

A. Určete a zdůvodněte, kolik vzájemných porovnání prvků pole nastane při řazení daného pole délky 8 algoritmem Merge Sort. Pole: 2, 4, 6, 5, 8, 7, 3, 1.

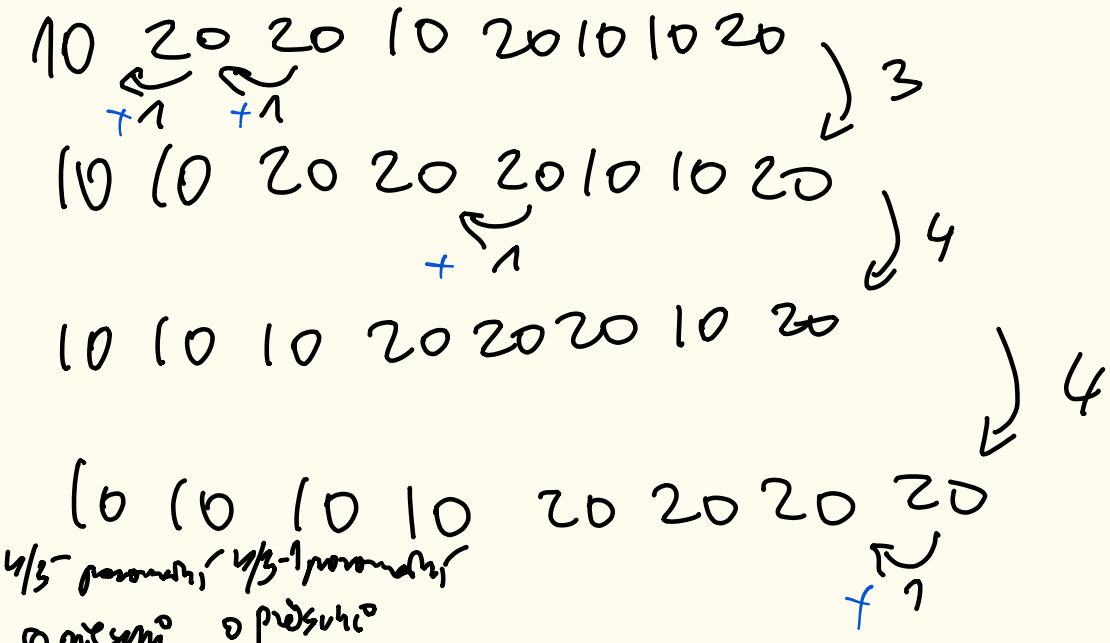
B. Určete a zdůvodněte, kolik vzájemných porovnání prvků pole nastane při řazení daného pole délky 8 algoritmem Insert Sort. Pole: 10 20 20 10 20 10 10 20

C. Insert sort řadí pole P délky 3*n*, pričemž před zahájením řazení mají všechny prvky v první a v poslední třetině pole hodnotu *n* a všechny prvky ve druhé třetině pole mají hodnotu 2*n*. Odvoďte a zdůvodněte asymptotickou složitost řazení pole P v závislosti na hodnotě *n*.

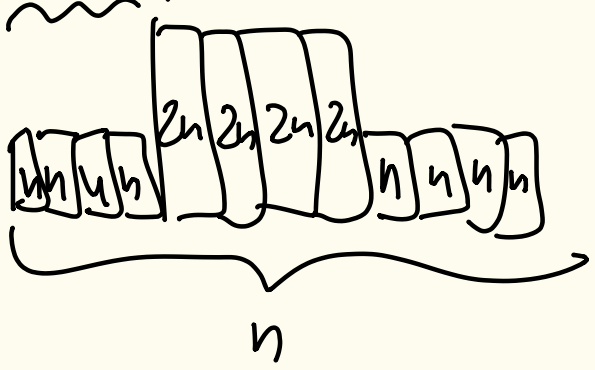
D. Quick sort řadí pole P délky 2*n*, pričemž před zahájením řazení tvoří prvních *n* prvků v poli rostoucí posloupnost a posledních *n* prvků v poli tvoří klesající posloupnost. Přitom platí, že všechny prvky v první polovině pole jsou menší než všechny prvky ve druhé polovině pole. Jako pivot je vždy vybírán první prvek řazeného úseku. Odvoďte a zdůvodněte asymptotickou složitost řazení pole P v závislosti na hodnotě *n*.



(B)



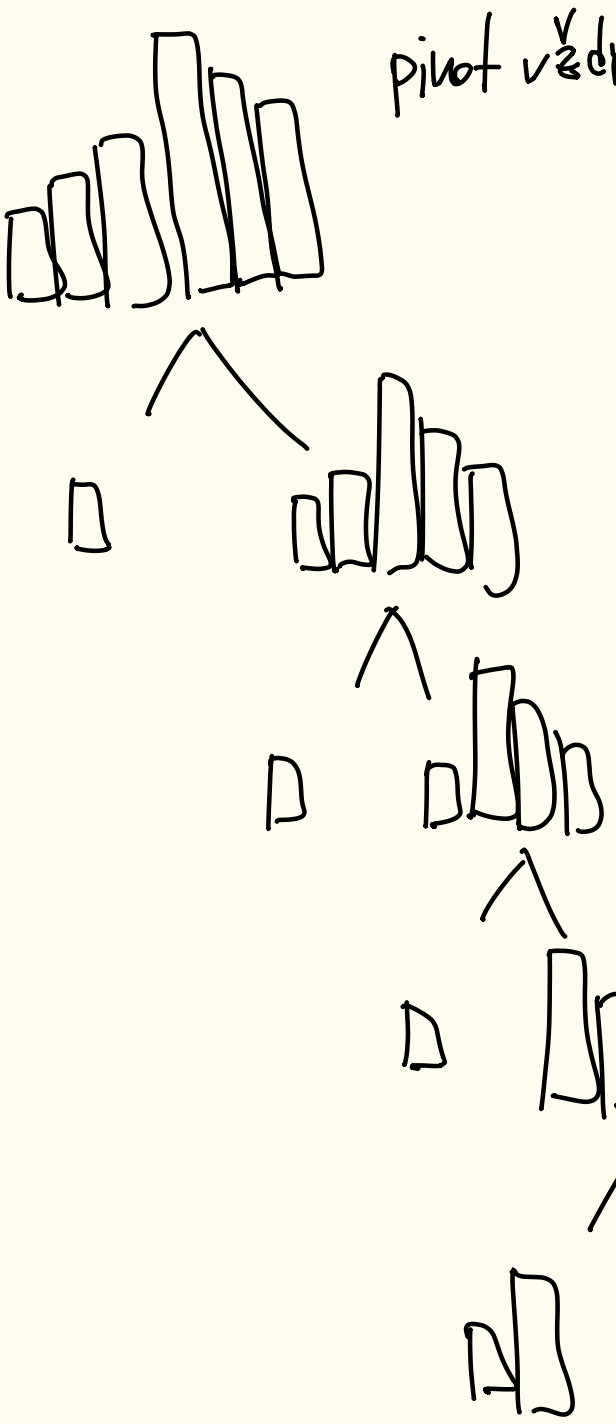
(C)



$$(n-1) + (n) + n(n+1)$$

$$= \Theta(n^2)$$

(D)



pivot vždy odřízne jeden prvek

nejhorší případ pro quick sort

$$\Theta(n^2)$$

2. Je dána množina M obsahující 3 předměty. Váhy těchto předmětů jsou 2, 5, a 6 kg. Hodnoty předmětů v daném pořadí od nejlehčího k nejtěžšímu jsou 10, 40 a 30 hodnotových jednotek. Dále je dán kontejner o kapacitě 20 kg. Úlohou je nalézt optimální naplnění kontejneru (nazývaného také batoh) v následujícím smyslu: Hledá se taková posloupnost P předmětů množiny M, pro níž platí, že součet hodnot předmětů v P je maximální možný a přitom součet vah těchto předmětů nepřekročí kapacitu kontejneru (batohu). Předměty se mohou v posloupnosti P opakovat a cena i váha každého předmětu se započítávají tolikrát, kolikrát se předmět vyskytuje v P.

A. Napište rekurentní vztah, pomocí nějž se počítají hodnoty v tabulce dynamického programování při řešení této úlohy. Nezapomeňte uvést také počáteční podmínky rekurentního vztahu. Vysvětlete význam jednotlivých symbolů v napsaném vztahu.

B. Pro zadané numerické hodnoty tabulku nakreslete a vyplňte konkrétními čísly s využitím rekurentního vztahu uvedeného v A.

C. Uvedenou úlohu je možno interpretovat také jako hledání optimální cesty v acyklickém orientovaném grafu. Napište, co představují uzly a hrany v takovém grafu a jak se určí ohodnocení jednotlivých hran.

D. Předpokládejte, že v neomezené úloze batohu je dáno N objektů, přičemž váha i cena každého z nich je vyjádřena jednociferným celým číslem. Kapacita batohu je vyjádřena celým číslem, jehož zápis v desítkové soustavě obsahuje k cifer. Určete asymptotickou složitost nalezení optimálního naplnění batohu v závislosti na hodnotách N a k. Zdůvodněte svůj výpočet.

$$C(k) = 0 \quad \text{iff} \quad k = 0$$

$$C(k) = -\inf \quad \text{iff} \quad k < 0$$

$$C(k) = \max\{C(k - V_i) + C_i, 0\}$$

$c_i =$	2	5	6
$V_i =$	10	40	30

kapacita 20 kg

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	1	1	2	4	4	5	5	6	8	8	9	9	10	12	12	13	14	14	16

$\times 10 = 160$

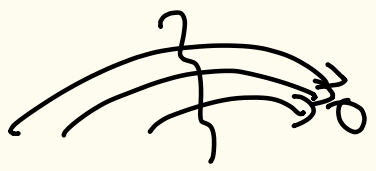
(c) hrana – ceny předmětů

uzly – kapacity batohu od 0 ... kapacita

$a, b \in \langle 0, n \rangle$

hrana vede z uzlu a do b, pokud je rozdíl $b - a = V_i$, hodnota hrany je pak c_i

(D)



k uzlů

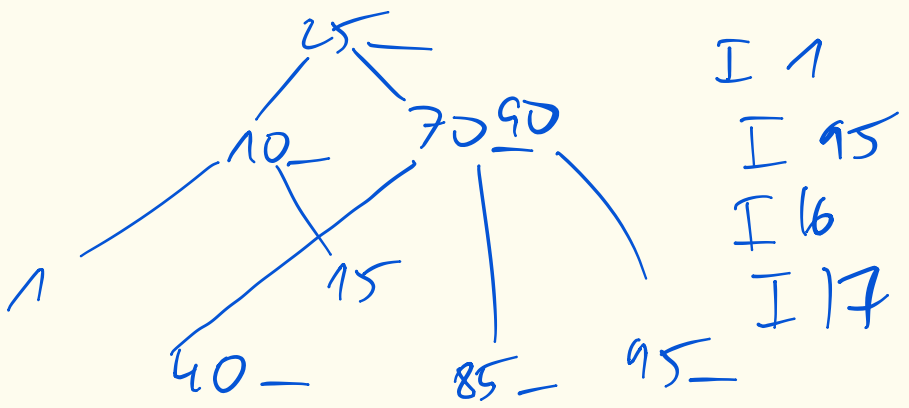
N hran vejvíce kapacita 10^k

dělím tabulky 10^k

v každém N aktualizací vejvíce

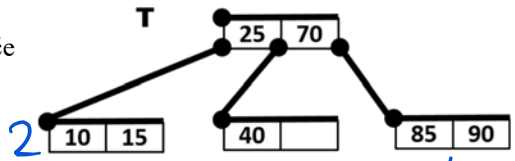
potom $O(10^k \cdot N)$ → asi trochu víc než reálná hodnota

proto O a ne Θ



$k \le 25$ $k \ge 70$

3. Na obrázku je B-strom T, jehož každý uzel smí obsahovat jen 1 nebo 2 klíče a nejvýše 3 bezprostřední potomky.



A. Uveďte všechny možné hodnoty celočíselného klíče K, po jehož vložení do T výška T vzroste. Uvažujte hodnoty K v intervalu od 1 do 100 včetně.

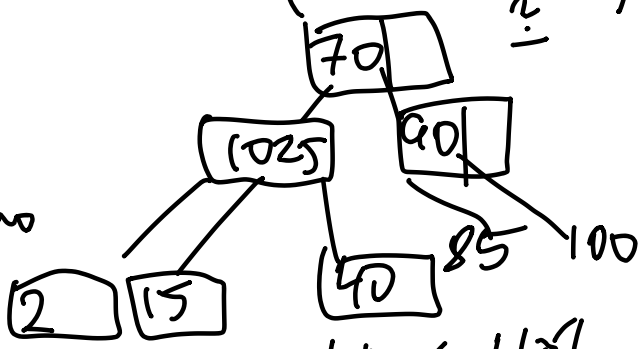
1-9 11-14 71-84 86-89
16-24 91-100

NE B. Zdůvodněte, zda je možné, aby po vložení dvou klíčů do původního stromu T vzrostla výška stromu T o 2. Pokud je to možné, nakreslete příklad. aby vzrostla výška, musíme rozbít uzel (není možné)

C. Jaký je nejmenší možný počet klíčů, které je nutno vložit do původního stromu T, aby v T bylo alespoň 9 uzlů? Zdůvodněte svůj závěr a nakreslete příklad.

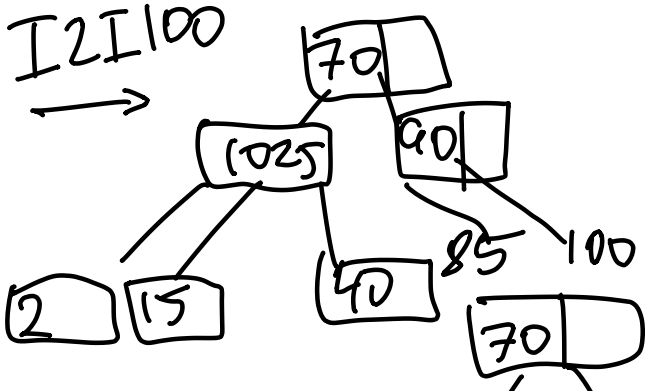
D. Předpokládejte že B-strom obsahuje N uzlů ($N \ge 6$), z nich každý může mít nejvýše 3 bezprostřední potomky. Jaký je, v závislosti na hodnotě N, maximální možný počet uzlů navštívených nebo zpracovávaných během vložení nového klíče do tohoto stromu? Vysvětlete, jak jste tento maximální počet nalezli.

(A) musím přidat uzel do nejlevějšího nebo nejpravějšího uzlu
tzn. klíče v rozsahu $(k \ge 1 \wedge k < 25) \| (k > 70 \wedge k \le 100)$
? ?

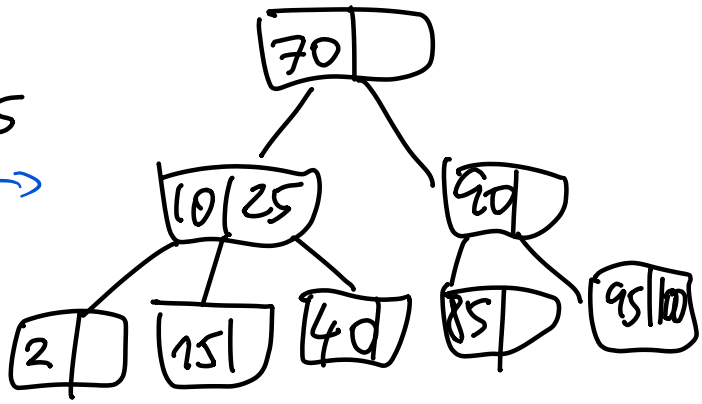


(B) po vložení jednoho prvku se zvětší výška vzniklé uvnitř jedné cesty, po vložení dalšího uzlu se pouze může změnit struktura

(C) I 2 I 100 →

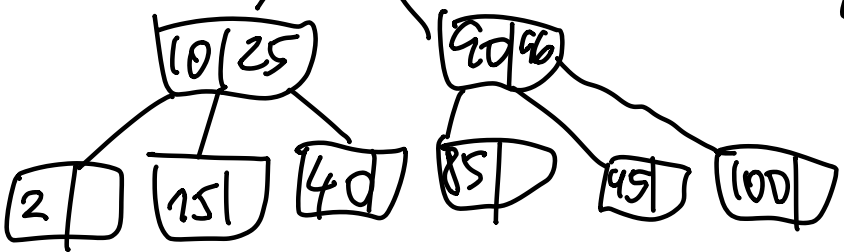


I 95 →

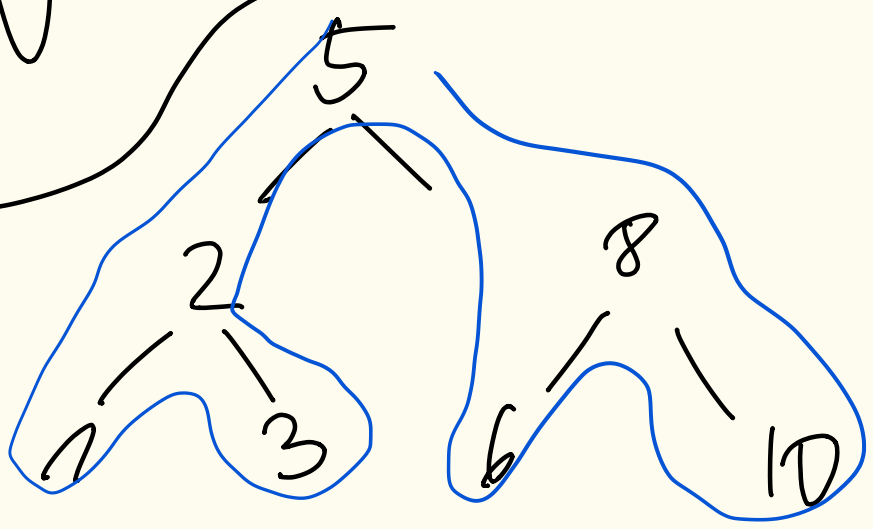


4 inserty

I 96 →

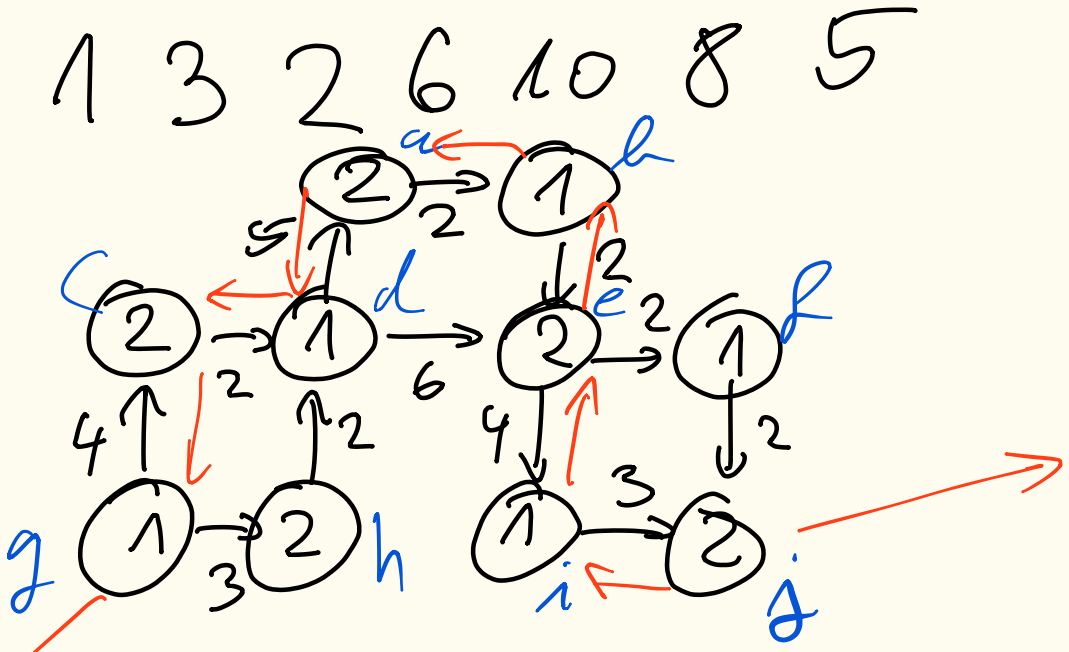


(D) $\log_2 N$



post order (left – right – root):

1 3 2 6 10 8 5



g	c	h	d	a	b	e	f	i	j
1	6	7	10	17	20	24	27	29	34
ø	g	g	c	d	a	b	e	e	i

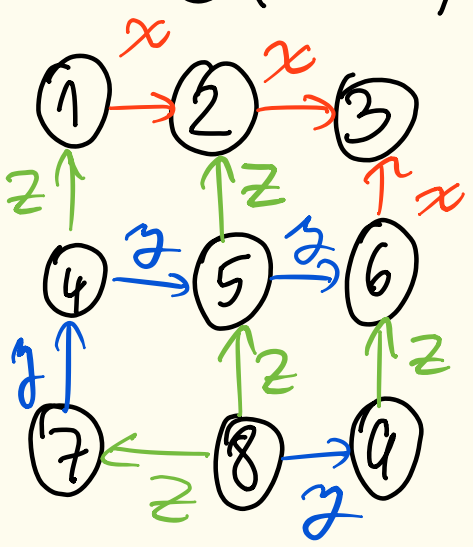
předpokladů itemů

gcdahejij

asymptotická složitost:

projdu všechny uzly a všechny hrany:

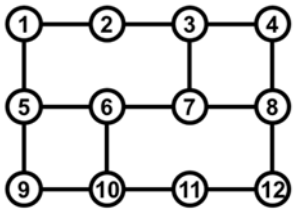
$\Theta(E+V)$



									max
topol. sort:	8	9	7	4	1	5	2	6	3
len x	0	0	0	0	0	0	4	0	3
len y	0	1	0	2	0	1	0	2	0
len z	0	0	1	0	3	1	2	2	0
prev x	0								
prev y	0								
prev z	0								

analogicky

4. V grafu G daném na obrázku je celkem 12 uzlů označených čísly 1, 2, 3, ..., 12. V grafu G probíhá prohledávání do šířky. Přitom navíc platí pravidlo, že algoritmus při své činnosti postupuje dopředu do dosud neotevřených vrcholů vždy tak, že pokaždé v určitém vrcholu vybírá jeho sousední vrchol s nejnižším možným označením.



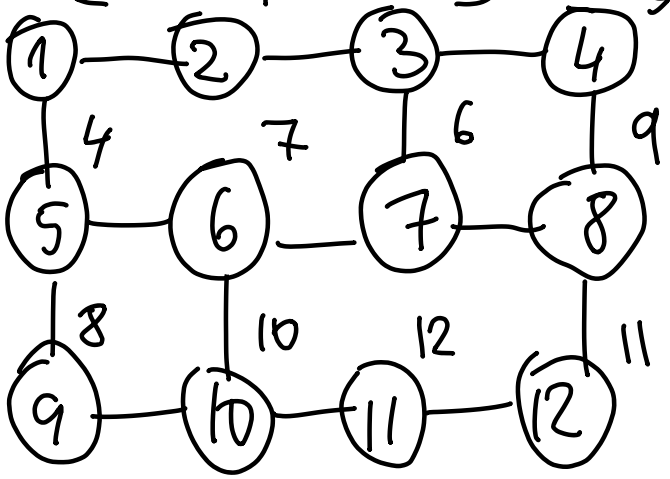
A. Prohledávání začne v uzlu 2.
Napište, v jakém pořadí budou otevřeny jednotlivé uzly během prohledávání.

B. Prohledávání začne v uzlu 2. Předpokládáme, že algoritmus využívá standardní datovou strukturu fronta. V určitém okamžiku bude ve frontě největší počet prvků za dobu celého prohledávání. Napište, které uzly budou v tom okamžiku ještě neobjevené (FRESH), které budou otevřené (OPEN) a které budou zavřené (CLOSED). Pokud existuje více možností, určete je všechny.

C. Napište, ve kterém uzlu nebo ve kterých uzlech musí prohledávání začít, za dodržení uvedeného pravidla, aby strom prohledávání měl co nejmenší hloubku, uveďte tuto hloubku a nakreslete strom prohledávání pro jeden z těchto případů.

D. Předpokládejme, že v úplném neorientovaném grafu s n uzly probíhá prohledávání do šířky. Při otevření každého uzlu je volána další funkce, která sama o sobě není součástí prohledávání a jejíž doba běhu je úměrná počtu uzlů, které již byly uzavřeny. Jaká bude asymptotická složitost tohoto prohledávání? Zdůvodněte.

A:



5 obsah fronty

2
13
35
547
4769
7698
698
9810
1012
1211
11

2 1 3 5 4 7 6 9 8 10 12 11

nebo

B: CLOSED: 1235 | 12345
OPENED: 4769 | 7698
zbylých neobjeveno

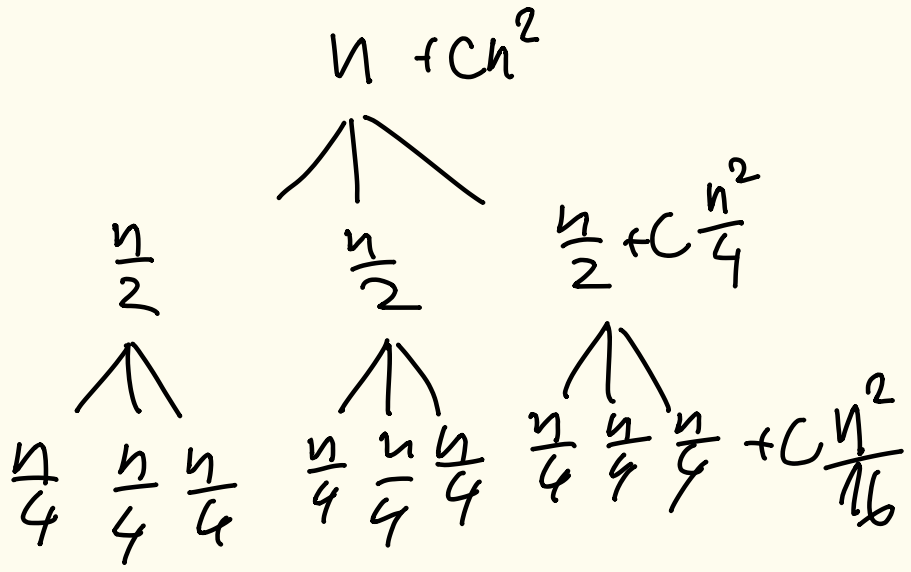
C: v uzlu 6 nebo 7?

D: v každém uzlu prohledáváme od n do 1 uzlu (n konst)
průměrně půl $n/2 \times n = \Theta(n^2)$

1-01)

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$$

(A)



(B) $\frac{cn^2}{16}$

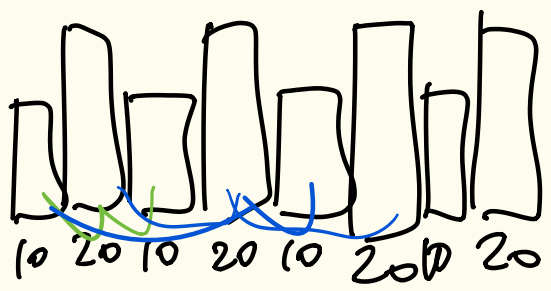
(C) $\log_2 N$

(D) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$ $\quad aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$

$$\log_2 3 < 2 \Rightarrow O(n^2)$$

04-1) Insertion sort

(A)



$\Sigma = 13$

(B) 4 v předchozím případě) prvek se porovná s $\frac{n}{2} - 1$ prvky 20 a jedním prvkem 10

po doszení $n = 8$ / vychází $\frac{8}{2} = 4$

$\Downarrow$

$\frac{n}{2}$ porovnání celkem

(C) všechnx prvky 20 provedou jedno porovnání

prvky 10 provedou od 2 porovnání do $\frac{n}{2}$ porovnání

```
def func(N):
    smaller = (N/2 - 1)/2 (N/2 + 2)
    larger = N/2
    return smaller + larger = N²/8 + 3N/4 - 1
```

$\frac{(\frac{n}{2}-1)}{2}\left(\frac{n}{2}+2\right)$

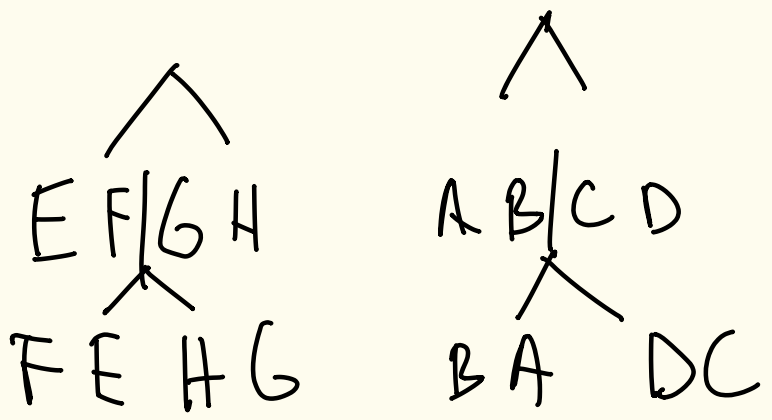
pro $n=8$ $\frac{3}{2}(6) = 9$

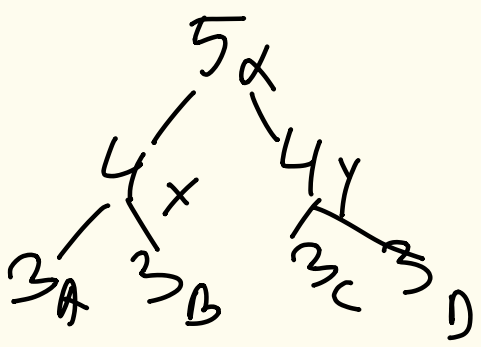
(1) $f(N) = \Theta(N^2)$

03-3 ABCD EFGH

(A) HGFE | DCBA

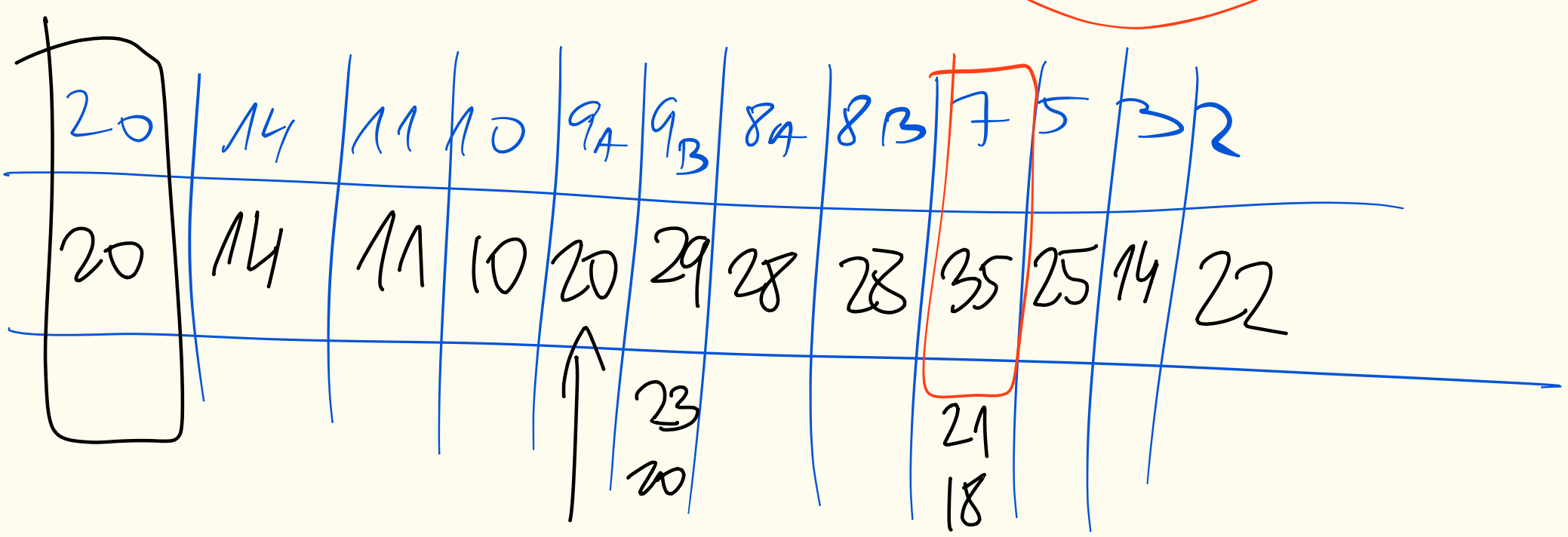
$A=B=\dots=H=0$





5α

10 11 3 9_A 5 14 2 8_A 20 7 8_B 9_B

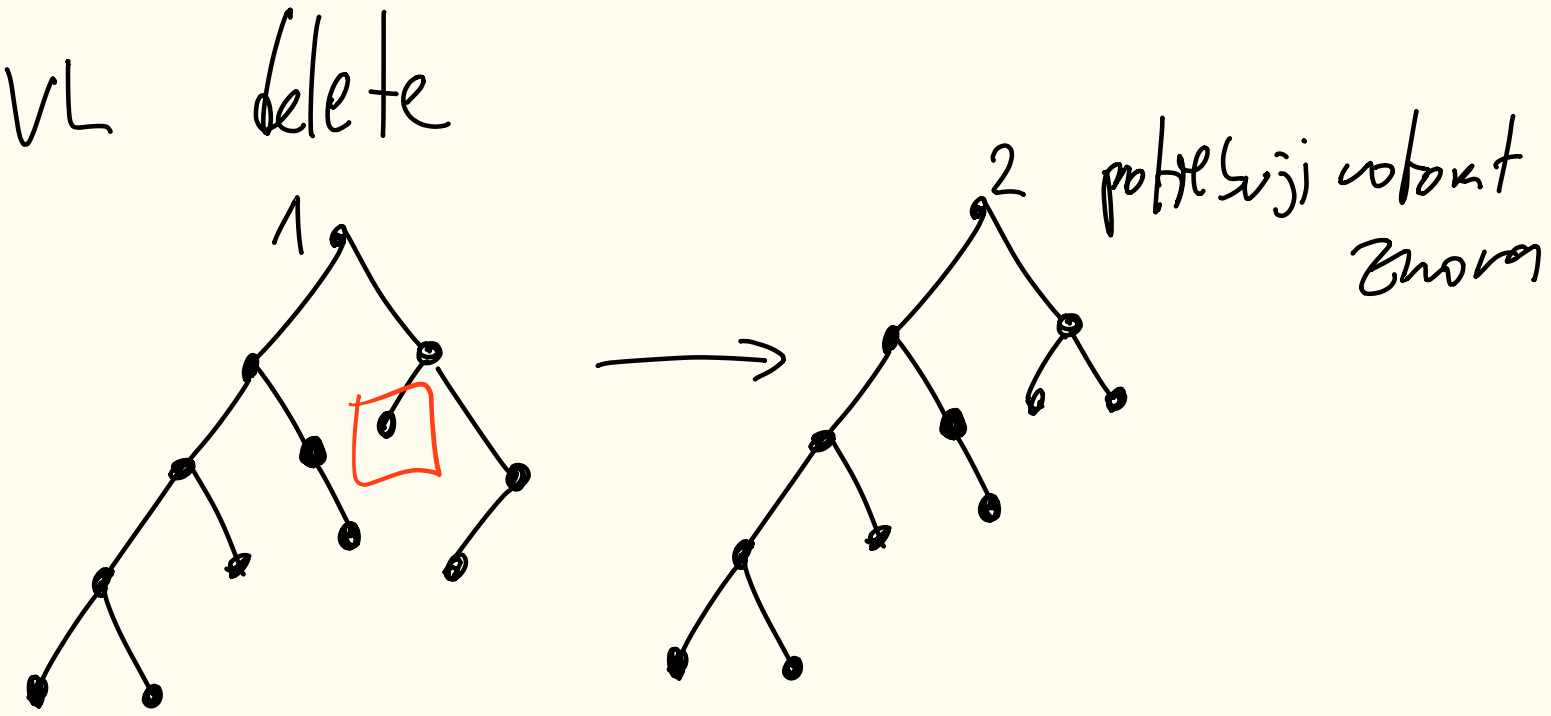


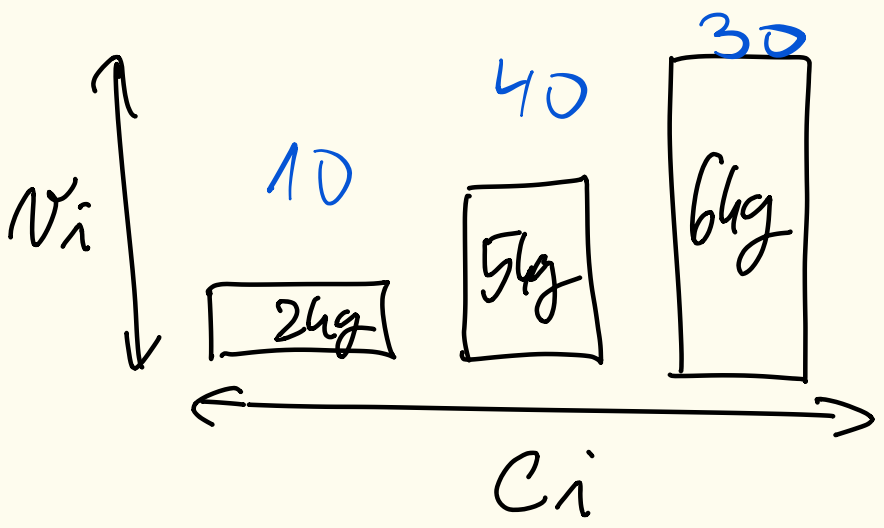
$n+1 + \dots + 1 \simeq n \cdot \frac{n}{2} \simeq \Theta(n^2)$

average case

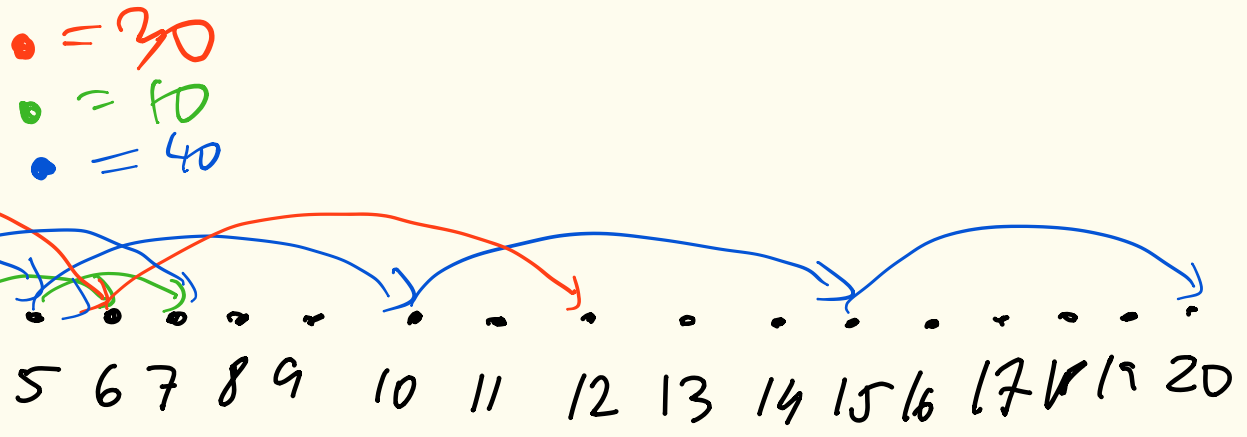
$\Theta(n^2 + n \cdot \log n) = \Theta(n^2)$

AVL delete





celkem 20kg



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
cost	0	0	10		20	40	30	50	40												
prev			0		2																

Omezení

c_i	20	40	10	20	10	50	80
v_i	2	4	5	6	8	12	14

celkem 30 celkem

w_i	2	3	4	6
p_i	9	14	16	30

předmět \ kapacita	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	9	9	9	9	9	9	9	9	9
2	0	0	9	14	14	23	23	23	23	23	23
3	0	0	9	14	16	23	25	30	30	39	39
4	0	0	9	14	16	23	30	30	39	44	46

A: 143 158 162 139 144 155 161

B:

~~161~~
162
~~143~~
~~144~~
~~155~~
~~158~~
~~139~~

→

139
143
144
155
158
161
162

	z_1	k_1
a	3	3
b	4	4
c	1	2
d	5	8

	z_2	k_2
a	2	6
b	4	7
c	3	8
d		

ac, ad, ad, bb, bc, bd,

ca, cd

1	a c	2	7
2	a c		5
3	c a		8
4	b b		1
5	a d	6	6
6	a c	7	
7	b d	~~8~~	
8	c d		