Příklad 1/23

Pro rostoucí spojité fukce f(x), g(x) platí $f(x) \in \Omega(g(x))$.
Z toho plyne, že:

a) $f(x) \in O(g(x))$

b) $f(x) \in \Theta(g(x))$

c) $g(x) \in \Theta(f(x))$

d) $g(x) \in \Omega(f(x))$

e) $g(x) \in O(f(x))$

Příklad 2/23

Pro rostoucí spojité fukce f(x), g(x) platí $f(x) \in O(g(x))$.
Z toho plyne, že:

a) $f(x) \in \Theta(g(x))$

b) $f(x) \in \Omega(g(x))$

c) $g(x) \in \Theta(f(x))$

d) $g(x) \in \Omega(f(x))$

e) $g(x) \in O(f(x))$

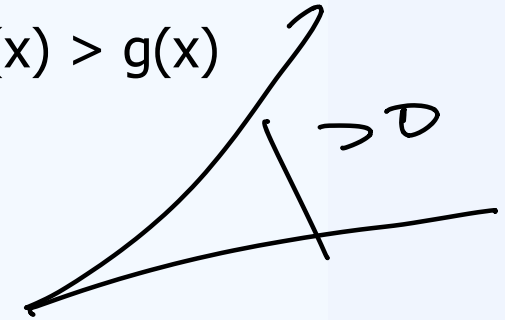
Příklad 3/23

Pokud funkce f roste asymptoticky rychleji než funkce g
(tj. $f(x) \notin O(g(x))$), platí následující tvrzení:

a) jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak f(x) > g(x)

b) rozdíl f(x) - g(x) je vždy kladný

c) rozdíl f(x) - g(x) je kladný pro každé x > y,
kde y je nějaké dostatečně velké číslo



d) obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty

e) nic z předchozího

Příklad 4/23

Pokud funkce f roste asymptoticky stejně rychle jako funkce g (tj. $f(x) \in \Theta(g(x))$), platí právě jedno následující tvrzení. Které?

a) jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak f(x) = g(x)

b) ani poměr f(x)/g(x) ani poměr g(x)/f(x) nekonverguje k nule s rostoucím x

c) rozdíl f(x) - g(x) je kladný pro každé x > y, kde y je nějaké dostatečně velké číslo

d) obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty

e) nic z předchozího

Příklad 5/23

Pro dvě spojité funkce f(x) a g(x) rostoucí na celém **R** platí f(x) < g(x) pro každé x $\in$ **R**. To znamená:

a) $f(x) \notin \Omega(g(x))$

b) $f(x) \notin O(g(x))$

c) je možné, že $f(x) \in \Omega(g(x))$

d) $g(x) \notin \Theta(f(x))$

e) f(x) roste asymptoticky pomaleji než g(x)

Příklad 6/23

Pro dvě spojité funkce f(x) a g(x) rostoucí na celém **R** platí $f(x) \notin \Omega(g(x))$, $f(x) \notin \Theta(g(x))$. Tudíž:

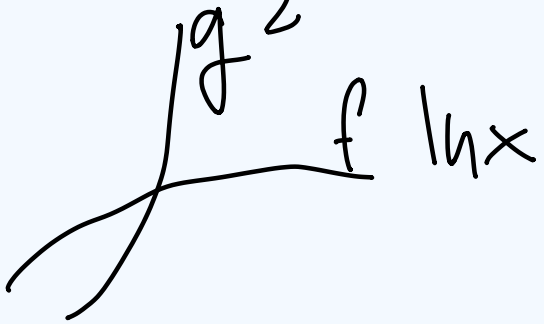
a) $g(x) \in O(f(x))$ → $f(x) \in \Omega(g(x))$ ↯

b) $g(x) \in \Theta(f(x))$ → ↯

c) $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \mathbf{R}$ — nepl. pro každé

d) $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \mathbf{R}$ $f(x) \in \Omega(g(x))$

e) může existovat $y \in \mathbf{R}$ takové, že $f(y) > g(y)$



Příklad 7/23

Algoritmus A probírá postupně všechny prvky v dvourozměrném poli o velikosti $n \times n$ a s každým prvkem provádí další (nám neznámou) akci, jejíž složitost je $\Theta(\log_2(n))$. Celková asymptotická složitost algoritmu A je tedy:

a) $\Theta(n \cdot \log_2(n))$

b) $\Theta(n^2)$

c) $\Theta(n^3)$

d) $\Theta(n^2+\log_2(n))$

e) $\Theta(n^2 \cdot \log_2(n))$

Příklad 8/23

Právě jeden z následujících výroků je nepravdivý. Označte jej.

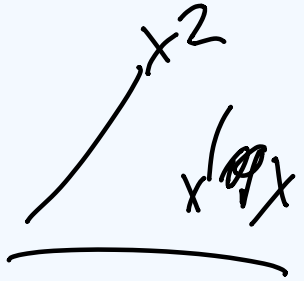
a) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2 - x)$ $\in O(x^2)$ ✓

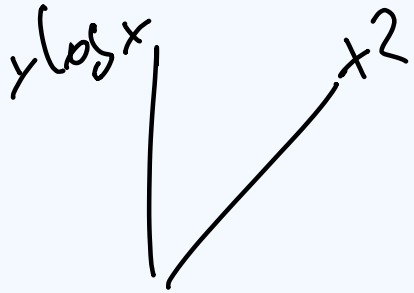
b) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2 - \log_2(x))$ $\in O(x^2)$ ✓

c) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x^2 - \log_2(x))$ $\in \Omega(x^2)$

d) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x + \log_2(x))$ $\in \Omega(x)$ ✓

e) $x \cdot \log_2(x) \in \Theta(x \cdot \log_2(x^2))$ $\in \Theta(x \log_2 x)$





Příklad 9/23

Algoritmus A provede jeden průchod polem s *n* prvky. Při zpracování prvku na pozici *k* provede *k*+*n* operací. Operační (=asymptotická) složitost algoritmu A je tedy:

a) $\Theta(k+n)$

b) $\Theta((k+n) \cdot n)$

c) $\Theta(k^2+n)$

d) $\Theta(n^2)$

e) $\Theta(n^3)$

Příklad 10/23

V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (.....) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.

a) $x^2 \cdot 2^x \in \Omega(\cancel{(\ln(x^2))^2} + 2^x)$

b) $(\ln(x^2))^2 + 2^x \in \Omega(x^2 + \cancel{\ln(x^2)})$

c) $2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \notin \cancel{\quad}(2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1})$

Příklad 11/23

V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (.....) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.

a) $x^2 \cdot \ln(x^2) \in \Omega(x^2 + \ln(x))$ x^2

b) $x^3 + \ln(x^2) \in O(x^3 + 2^x)$ 2^x

c) $x^3 \cdot \ln(x^2) \notin \Omega(\ln(x^2) + 2^x)$ 2^x

$x^3 \cdot x = x^4$

Příklad 12/23

Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné f(x), g(x) a h(x), pro které současně platí všechny tři následující vztahy:

$f: x^2 \quad g: x \quad h: \log x$

$f(x) \notin O(g(x)), \quad g(x) \notin \Theta(h(x)), \quad h(x) \notin \Omega(f(x))$

Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.

Příklad 13/23

Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné f(x), g(x) a h(x), pro které současně platí všechny tři následující vztahy:

$f(x) \notin O(g(x))$, $g(x) \notin \Omega(h(x))$, $h(x) \notin \Theta(f(x))$

Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.

Příklad 14/23

Matice A má M řádků a N sloupců indexovaných od 0. Na zpracování prvku matice na pozici $[r][s]$ $(0 \le r < M, 0 \le s < N)$ je zapotřebí právě s operací, z nichž každá má konstantní složitost. Jaká je asymptotická složitost zpracování celé matice?

$r \times 0 \ldots s \times c$

$$M \times \frac{N-1 \times N}{2} = \Theta(MN^2)$$

Příklad 15/23

Matice A má M řádků a N sloupců indexovaných od 0. Na zpracování prvku matice na pozici $[r]\,[s]$ $(0 \le r < M, 0 \le s < N)$ je zapotřebí právě $s+r$ operací, z nichž každá má konstantní složitost. Jaká je asymptotická složitost zpracování celé matice?

$$\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} i+j = \sum_{i=0}^{M-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} i + \sum_{j=0}^{N-1} j\right) = MN^2 + N\sum_{i=0}^{M-1} i = N^2M + NM^2$$

$\sum_{i=0}^{M-1}$ … $\Theta(M)$ … $\Theta(M)$ … $\Theta(M)$

$\sum_{j=0}^{N-1} i$ … $\Theta(N_1)$ … $\Theta(N)$ … $i\sum_{j=0}^{N-1} 1$

$\sum_{j=0}^{N-1} j$ … $\Theta(N^2)$ … $\Theta(N^2)$

$\sum_{i=0}^{M-1} i$ … $\Theta(M^2)$ … $\Theta(M^2)$

Příklad 16/23

Uvažte algoritmus násobení dvou celých čísel, tak jak je znám ze školy pro ruční násobení. Předpokládejte, že sečtení nebo vynásobení dvou *číslic* má konstantní časovou složitost.

Určete asymptotickou složitost vynásobení dvou celých čísel M, N zapsaných v desítkové soustavě.

$\log(N) \cdot \log(M)$

$\log(N) \cdot \log(M)$

$\Theta(\log(n)\log(n))$

Příklad násobení

```
M =  9803
N =  347
```

```
   9803
 x 347
-------
  68621
 39212
29409
---------
3401641
```

Příklad 17/23

Určete asymptotickou složitost daného kódu v závislosti na N.

```
//a = array[0..N-1] of int;
for(i = 0; i < N; i++)
  a[i] = N;
for (i = 0; i < N; i++)
  while (a[i] > 0) {
     print(a[i]);
     a[i] = a[i]/2;    // integer division
  }
```

Příklad 18/23

Určete asymptotickou složitost daného kódu v závislosti na N.

```
//a = array[0..N-1] of int;
for(i = 0; i < N; i++)
  a[i] = i;
for (i = 0; i < N; i++)
  while (a[i] > 0) {
     print(a[i]);
     a[i] = a[i]/2;    // integer division
  }
```

Příklad 19/23

Určete asymptotickou složitost daného kódu v závislosti na N.

```
//a = array[0..N-1] of int;
for(i = 0; i < N; i++)
  a[i] = 1;
for (i = 1; i < N; i++)
  while (a[i] <= 2*a[i-1]) {
     print(a[i]);
     a[i] = a[i]+1;
  }
```

Příklad 20/23

A. Jaká je asymptotická složitost vynásobení dvou matic o velikosti N x N?

B. Jaká je asymptotická složitost Gaussova eliminačního algoritmu pro soustavu N rovnic o N neznámých?

C. Jaká je asymptotická složitost výpočtu determinantu matice velikosti N x N přímo z definice determinantu?

Lze determinant vypočítat efektivněji, s nižší asymptotickou složitostí? Jak?

D. Jaká je asymptotická složitost výpočtu řešení soustavy N lineárních rovnic s N neznámými pomocí Cramerova pravidla?

Příklad 21/23

Na obvodu kružnice jsou v libovolně nepravidelných intervalech vyznačeny body očíslované po řadě za sebou 1, 2, ..., N. Máme určit počet všech takových trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v očíslovaných bodech a které neobsahují střed kružnice jako svůj vnitřní bod.

Navrhněte algoritmus a určete jeho asymptotickou složitost.

Řešte analogickou úlohu pro konvexní čtyřúhelníky.

Příklad 22/23

Na výstup máme vypsat všechna kladná celá čísla, která jsou menší než dané číslo N a která ve svém binárním zápisu obsahují právě 3 jedničky.

Jaký bude asymptotická složitost efektivního algoritmu?

Algoritmus lineární vůči N je neefektivní.

Příklad 23/23

Popište, jak vypočtete hodnotu

$$\log(\log(N^{(N!)}))$$

pro $N = 10^7$.

Jak dlouho bude trvat výpočet na Vašem osobním počítači?
Logaritmus je o základu 10.

Nepoužívejte aproximace jako např. Stirlingův vzorec apod.