Zparametrizujte křivku:

$C: \; x^2+y^2=1 \;\&\; x+y+z=2$

$x^2+y^2=1^2$

jedná se o elipsu, přes průmět píšeme parametrizaci kružnice.

$x(t)=\cos t \qquad y(t)=\sin t \qquad t\in\langle 0,2\pi\rangle$

$z=2-x-y=2-\cos t-\sin t$

$\varphi(t)=(\cos t,\ \sin t,\ 2-\cos t-\sin t) \qquad t\in\langle 0,2\pi\rangle$

Určete práci vektorového pole podél této křivky.

$\vec{F}=(y,z,x)$

$$\int_C F\cdot ds = \int_0^{2\pi} \underbrace{F(\varphi(t))}_{(\sin t,\ 2-\cos t-\sin t,\ \cos t)}\cdot \overbrace{\varphi'(t)}^{(-\sin t,\ \cos t,\ \sin t-\cos t)}dt = \int_0^{2\pi} 2\cos t-\cos^2 t-1\,dt=$$

$$(\sin t,\ 2-\cos t-\sin t,\ \cos t)(-\sin t,\ \cos t,\ \sin t-\cos t)=$$

$$=\underbrace{\cancel{-\sin^2 t}}_{-1}+2\cos t-\cancel{\cos^2 t}-\cancel{\sin t\cos t}+\cancel{\sin t\cos t}-\cos^2 t=$$

$$-\cos^2 t = \sin^2 t-1$$

$$=2\cos t-\cos^2 t-1$$

$$=-2\pi+2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt-\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\cos t\,dt = \sin t = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2} = \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,dt}_{=\pi}-\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt}_{0}$$

$$\frac{1}{2}\sin 2t$$

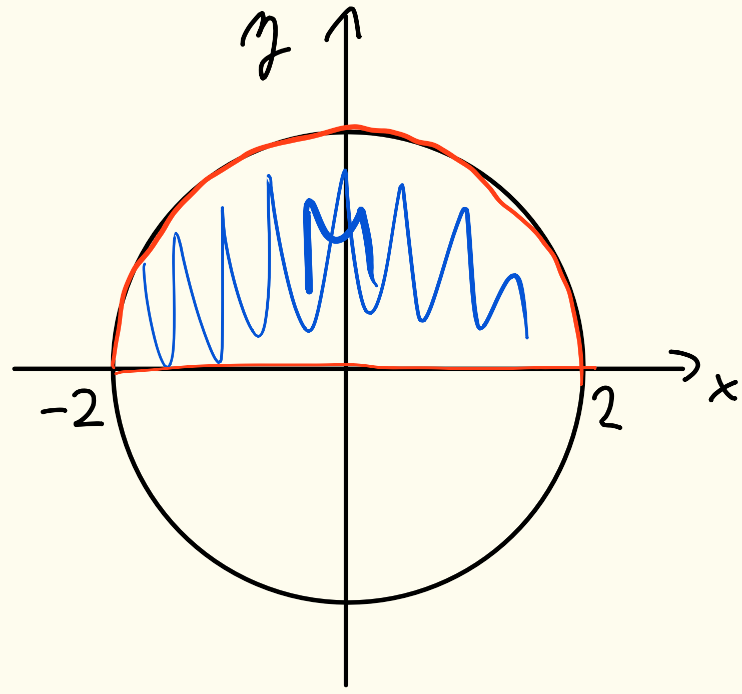
$$=-2\pi-\pi=\underline{\underline{-3\pi}}\,?$$

Pomocí Greenovy věty spočtěte práci vektorového pole

$$\vec{F}(x,y) = (xy^2 + x,\ 2x^2 + \cos y)$$

podél kladně orientované křivky C, která je hranicí oblasti

$$E:\ x^2 + y^2 \le 4 \quad \&\quad y \ge 0$$



$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_M \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dA$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy$$

$$\iint_D 4x - 2xy\, dA$$

polární souřadnice

$$U:\quad 0 \le r \le 2$$
$$0 \le \varphi \le \pi$$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$\int_0^2 \int_0^\pi 4r^2\cos\varphi - 2r^3\cos\varphi\sin\varphi\ d\varphi\, dr = \left| \begin{array}{l} \sin\varphi = t \\ \cos\varphi\, d\varphi = dt \end{array} \right|$$

$$4r\cos\varphi - 2r\cos\varphi\, r\sin\varphi$$

$$4r^2\cos\varphi - 2r^3\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\cos\varphi\,(4r^2 - 2r^3\sin\varphi)$$

$$= \int_0^2 \int_0^0 4r^2 - 2r^3 t\, dt\, dr = \int_0^2 4r^2 - 2r^3 \int_0^0 t\, dt\, dr = 0$$

$$= \int_0^2 4r^2 - 2r^3\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = \int_0^2 4r^2 - r^3\, dr = 4\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 - \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{4} = \frac{32}{3} - 4 =$$

$$= \frac{32-12}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(4) $\vec{F}(x,y,z) = (2xz + \sin y,\ x\cos y + z,\ x^2 + y)$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz+\sin y & x\cos y + z & x^2+y \end{vmatrix} = \underbrace{(1-1)}_{0} e_1 + \underbrace{(2x-2x)}_{0} e_2 + \underbrace{(\cos y - \cos y)}_{0} e_3$$

$= (0,0,0)$ pole je konzervativní

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz + \sin y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y + z \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + y \qquad (3)$$

$$f = x^2 z + yz + C_3(x,y)$$

Dosazení do (2) $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \cancel{z} + \frac{\partial C_3}{\partial y} = x\cos y + \cancel{z}$

$$C_3 = x\sin y + C_2(x)$$

$$f(x,y,z) = x^2 z + yz + x\sin y + C_2(x)$$

Dosazení do (1)

$$\cancel{2xz} + \cancel{\sin y} + C_2'(x) = \cancel{2xz + \sin y}$$

$$C_2'(x) = 0$$

Potenciál pole:

$$f(x,y,z) = x^2 z + yz + x\sin y + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Práce potřebná pro přemístění částice:

$$f(B) - f(A) = f(1,0,1) - f(0,1,0) = \underline{\underline{1}}$$

Sem test 1

Určete tečnou rovinu k ploše

$f: x^2 + y^2 - (x+z)^2 = 1$

v bodě $A = (1,2,1)$. Jaký úhel svírá tato tečná rovina s rovinou $g: x + y + 3z = 2$?

$f: x^2 + y^2 - (x^2 + 2xz + z^2) = 1$

$y^2 - 2xz - z^2 = 1$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2z \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2x - 2z$$

$$\nabla f = (-2z, 2y, -2x-2z)$$

$$\nabla f(1,2,1) = (-2, 4, -4) = \vec{n} \text{ ... normálový vektor tečné roviny}$$

$-2 - 2$

Tečná rovina je potom:

$$-2x + 4y - 4z + d = 0$$

dosazením A:

$$-2 + 8 - 4 + d = 0$$

$$d = -2$$

$$\underline{\underline{-2x + 4y - 4z - 2 = 0}}$$

úhel vektorů

$$\vec{m} = \nabla g(x,y,z) = (1,1,3)$$

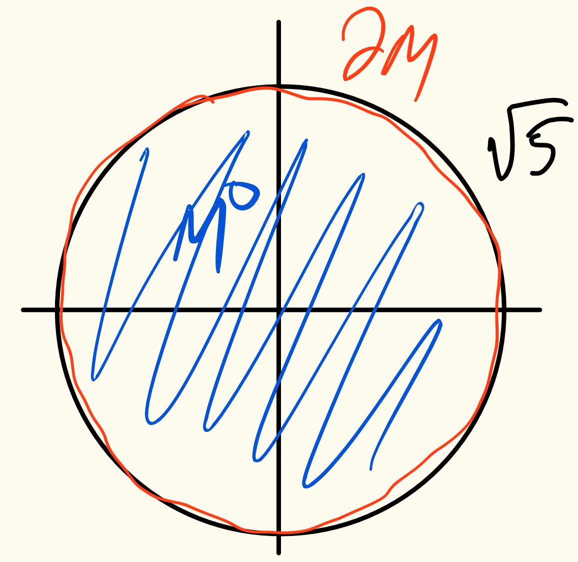
úhel: $\cos\alpha = \frac{|n \cdot m|}{\|n\| \cdot \|m\|} =$

$$= \frac{|-2+4-12|}{\sqrt{4+16+16}\sqrt{1+1+9}} = \frac{10}{6\sqrt{11}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = \arccos\left(\frac{10}{6\sqrt{11}}\right)}}$$

Najděte maximum a minimum funkce $f(x,y) = x^2+y^2-4x+8y$

na množině $M: x^2+y^2 \le 5$



Rozdělím množinu na ∂M a M°

$\partial M: g(x,y): x^2+y^2-5$

Lagrangeovy multiplikátory

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

$$L(x,y) = x^2+y^2-4x+8y - \lambda(x^2+y^2-5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x-4-2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y-2\lambda y+8 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x^2-y^2+5 = 0$$

$$2x-2\lambda x = 4$$
$$x(2-2\lambda) = 4$$
$$x = \frac{4}{2-2\lambda}$$

$$2y-2\lambda y = -8$$
$$y(2-2\lambda) = -8$$
$$\frac{x}{y} = \frac{4}{-8}$$
$$-8x = 4y$$
$$-2x = y$$

$$-x^2-(-2x)^2+5 = 0$$
$$-x^2-4x^2+5 = 0$$
$$-5x^2 = -5$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1 \quad y = \mp 2$$

Dva podezřelé body: $(1,-2)$, $(-1,2)$ $\quad f(x,y) = x^2+y^2-4x+8y$

Dosazení do původní funkce: $f(1,-2) = 1+\cancel{4}\cancel{-4}-16 = -15$ → min

$f(-1,2) = 1+4+4+16 = 25$ → max

→ jsou extrémy dle věty o nabývání extrémů (množina je uzavřená omezená)

Pro vnitřek M^0:

Musí uvnitř platit $\nabla f(x,y) = (0,0)$ aby v bodě byl extrém

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 8 = 0$$

$$2x = 4$$
$$x = 2$$
$$2y = -8$$
$$y = -4$$

Podezřelý bod M^0: $(2,-4)$

Po dosazení bodu $(2,-4)$ zpět do M^0: $x^2 + y^2 \leq 5$

$$4 + 16 \overset{?}{\leq} 5$$

Neplatí, v bodě $(2,-4)$ není extrém, jelikož není v M^0.

(2.) Lok. extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2 \quad Df = \mathbb{R}$$

extrém

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 8x + 2y,\ 2x - 2y) = (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 8x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y$$

$$3x^2 - 8x + 2y = 0$$
$$2x - 2y = 0$$
$$2x = 2y$$
$$x = y$$

$$3x^2 - 8x + 2x = 0$$
$$3x^2 - 6x = 0$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$

$x = 0$, $y = 0$ $\quad$ $x = 2$, $y = 2$

2 body podezřelé z extrému $(0,0)$, $(2,2)$

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x-8 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad 12-8$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \Delta_1 = -8 < 0 \\ \Delta_2 = 12 > 0 \end{matrix}$$

neg. def. Sylvest. kritérium

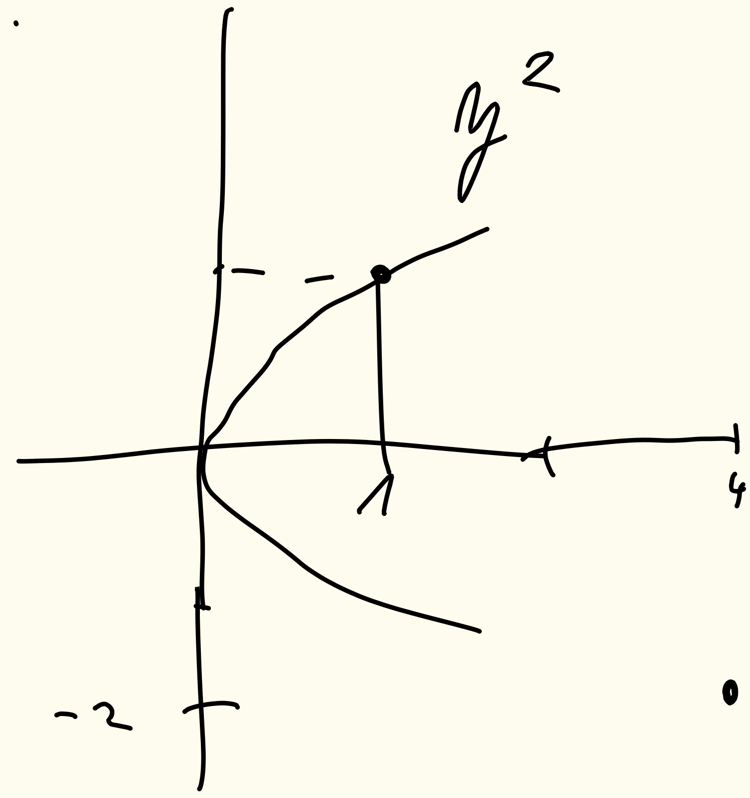
lok. max

$$Hf(2,2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \Delta_1 = 4 \\ \Delta_2 = -12 \end{matrix}$$

indefinitní

sedlový bod

Práce vektorového pole $\vec{F}(x,y)=(y,-2x)$ podél orientované křivky $x=y^2$ jdoucí z $(1,1)$ do $(4,-2)$.



$$\int_C F\cdot ds$$

parametrizace C

$\varphi(t): (t^2, t)$ $\quad t\in\langle 1,-2\rangle$

$$\int_1^{-2} \underbrace{F(\varphi(t))}_{(t,-2t^2)}\cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{(2t,1)}\, dt = 0$$

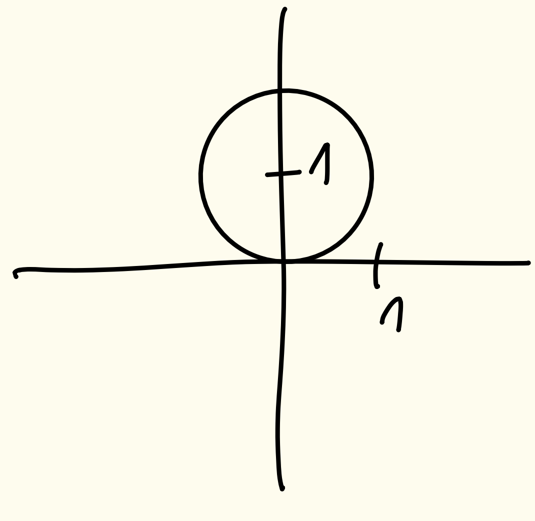
$$= 2t^2-2t^2 = 0$$

$$\int_a^b F(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Spočítejte křivkový integrál

$$\int_C xy\, ds$$

$C: x^2+y^2=2y$



Parametrizace kružnice:

$$x^2+y^2-2y=0$$

$$x^2+(y-1)^2=1$$

$x=\cos t$

$y=\sin t+1$

$\varphi(t): (\cos t, \sin t+1)$

$\|\varphi'(t)\|=\|(-\sin t, \cos t)\| = \sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$

křivkový integrál

$$\int_0^{2\pi} \cos t(\sin t+1)\, dt = \left| \begin{matrix} \sin t = u \\ \cos t\, dt = du \end{matrix} \right| = \int_0^0 t+1 = \underline{\underline{0}}$$

$$\int_C 1\, ds = \int_0^{2\pi} 1\, dt = [t]_0^{2\pi} = \underline{\underline{2\pi}}$$

1/3 t — Limity, Lagrange (extrémy na množině), směrová derivace, lok. extrémy (Hessián), tečná rovina, plocha (v bodě, na množině s ρ)

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\det(J\,\Phi(x,y)) = r$

2/3 t — změna pořadí integrace + polární souřadnice

3/3 t — parametrizace, potenciál, těžiště, hmotnost, objem tělesa, moment setrvačnosti, práce vektorového pole, plošný int. (Gauss), Green

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$

$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$

$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$

$$\int_C f(\varphi(t)) \to \text{s hustotou}$$

$$\int_C 1\,\|\varphi'(t)\| \to \text{délka křivky}$$

$$\int_C F \cdot ds = \int_a^b F(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

práce vekt. pole