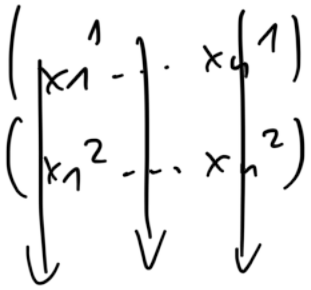
Def: Říkáme, že $\{x^k\}$ je konvergentní, když konverguje k bodu $x^0 \in \mathbb{R}^n$,

$x^k = (x_1^k, \dots x_n^k)$

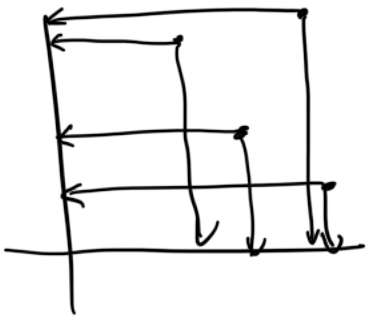
pokud $\{\|x^k - x^0\|\}$ má limitu $0 \in \mathbb{R}$

Kritérium (věta)

$x^k \to x^0 \iff (\forall i = 1, \dots, n) \lim_{k \to \infty} x_i^k = x_i^0$



$(x_1^0, \dots x_n^0)$



Dk: $\|x^k - x^0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i^0)^2} \geq \max_{0 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^0|$

$\sqrt{\ } \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i^0| \leq n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^0|$

dimenze (rozměr se)

Pozn $\|x^k - x^0\| \to 0 \Rightarrow \{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^0|\} \to 0$

$x_i^k \to x_i^0 \ \forall i$

Definice $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená

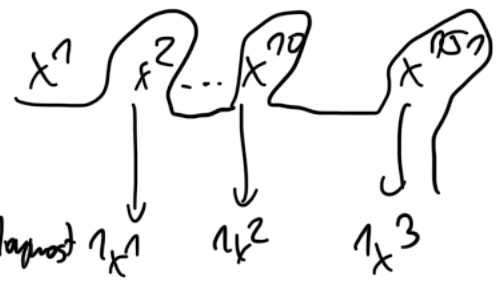
$\exists k > 0, (\forall x \in M) \ \|x\| < k$

Věta Každá omezená $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ má

konvergentní podposloupnost.

Dk. V n-rozměrech

$\{x^k\} \to \{{}_1x^k\}$ podposloupnost



podle kvitování ${}_1x_1^k \to y_1 \in \mathbb{R}$

$(x_1^1 \dots x_n^1) \ \{x_1^k\}_{k=1}^{\infty}$

$(x_n^2 \dots x_n^2)$

2. krok: vyberu $\{x_1^{k_2}\}$ podposloupnost $\{x_1^{k_1}\}$

tak, aby $\{x_2^{k_2}\}_{k=1}^{\infty}$ byla konvergentní $(\ldots,\ldots)$

n-tý krok: vyberu $\{x_n^{k_n}\}$ podposloupnost $\{x_{n-1}^{k_{n-1}}\}$ tak,

aby $\{x_n^{k_n}\}_{k=1}^{\infty}$ → konvergentní. Závěr: $\{x_n^{k_n}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$

Definice Kruhové okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$

Pro $\delta > 0$, $U_\delta(x) = \{y : \|x-y\| < \delta\}$

Definice Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom

říkáme, že $x \in \mathbb{R}^n$, je

vnitřní bod M pokud $\exists \delta > 0 : U_\delta(x) \subset M$

vnější bod M pokud $\exists \delta > 0, U_\delta(x) \cap M \neq \emptyset$

hraniční bod M, pokud $(\forall \delta > 0) U_\delta(x) \cap M \neq \emptyset \wedge$

$U_\delta(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$

Jednoduchý fakt

x je vnějším bodem $M \Leftrightarrow$ x je vnitřním bodem $\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus M}_{\text{doplněk}}$

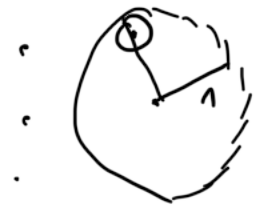
Fakt $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall M \subset \mathbb{R}^n$

x splňuje právě jeden z předchozích podmínek (vnitřní/hraniční/vnější)

definice M°, ∂M, $\bar{M}$ viz SEM2

Řekneme, že M je otevřená $\Leftrightarrow M = M^\circ$

Řekneme, že M je uzavřená $\Leftrightarrow M = \overline{M}$



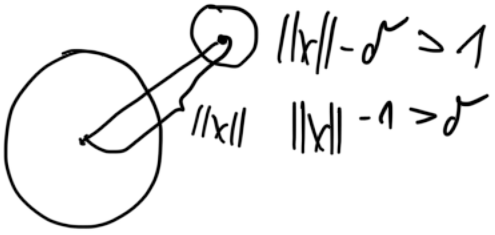
jednotková: $\{x, \|x\| < 1\}$

Pokud $\|x\| < 1$ stačí zvolit

$\delta < 1 - \|x\|$

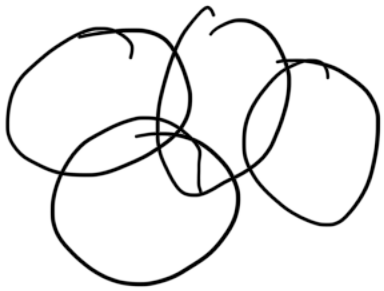
$\|x\| < 1 \Rightarrow$ uvnitř

$\|x\| > 0 \Rightarrow x$ je vnější bod M



$\overline{M} = \{x : \|x\| \leq 1\}$

Fakt: Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.



Fakt: $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall \delta > 0 \; U_\delta(x) \cap M \neq \emptyset\}$

Dk. $\overline{M} = M \cup \partial M$ tedy $\overline{M} \subset \{x : \forall \delta > 0, U_\delta(x) \cap M \neq 0\}$

Na druhou stranu, pokud $U_\sigma(x) \cap M \neq \emptyset$

2 možnosti, buď $x \in M \Rightarrow x \in \overline{M}$

nebo $x \in M \Rightarrow \forall \sigma > 0 \; U_\sigma(x) \cap \mathbb{R}^n \setminus M \neq \emptyset \Rightarrow x \in \partial M$

<u>Důsledek:</u> $\forall M$ platí $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ tedy

$(\overline{M}) = \overline{\overline{M}} = \overline{M}$ Tedy uzávěr M.

je uzavřená množina

$U_\sigma(x)$ obsahuje vnější body M

tedy $U_\sigma(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$

<u>Dk:</u> $x \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall \sigma > 0 \; U_\sigma(x) \cap M \neq \emptyset$

tedy $x \notin \overline{M} \Leftrightarrow (\exists \sigma > 0) \; U_\sigma(x) \cap M = \emptyset$

$\Leftrightarrow$ x je vnitřním bodem $\mathbb{R}^n \setminus M$

Další vlastnosti uzávěrů v množinách

<u>Věta</u> $M \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená a omezená právě když

$\forall \{x^{(k)}\} \subset M \; \exists$ konvergentní podposloupnost $\{x^{(k)}\}$ $\lim x^{(k)} \in M$