Věta $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená a uzavřená

$\Updownarrow$

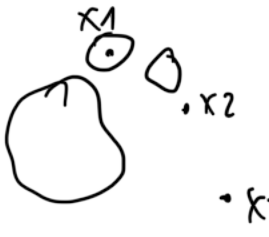
$\forall \{x^k\} \subset M$ má konvergentní podposloupnost s limitou $x^0 \in M$

Dk. $\Uparrow$ tedy pokud M není omezená nebo není uzavřená $\Longrightarrow$

$\exists \{x^k\} \subset M$ není konvergentní podposloupnost s limitou v M

$A \Rightarrow B$
$\neg B \Rightarrow \neg A$

M není omezená



Tato posloupnost již splňuje co chceme.
Pokud y^k je podposloupnost $\{x^k\}$.

platí $\|y^k\| > k$, $\lim_{k\to\infty} \|y^k\| = \infty$

$\forall k \; \exists x_k \in M, \; \|x_k\| > n$

Tedy $\{y^k\}$ není konvergentní.

M není uzavřená, tj. $\exists \; x^0 \in \overline{M} \setminus M$

$\forall \sigma > 0, \; U_\sigma(x^0) \cap M \neq \emptyset$

Volbou $\sigma = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ $U_{\frac{1}{k}}(x^0) \cap M \ni x^k$

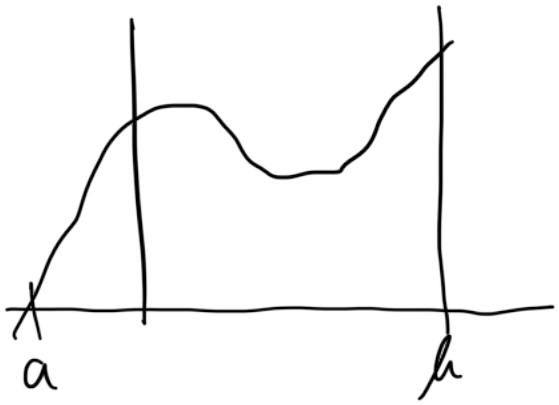
$\{x^k\} \subset M$ $\lim_{k\to\infty} x^k = x^0$

$\{y^k\}$ má taktéž limitu $x^0 \notin M$

Funkce více proměnných a jejich limity

$f: D \to \mathbb{R}^m$, kde $D \subset \mathbb{R}^n$ $\quad n, m \in \mathbb{N}$

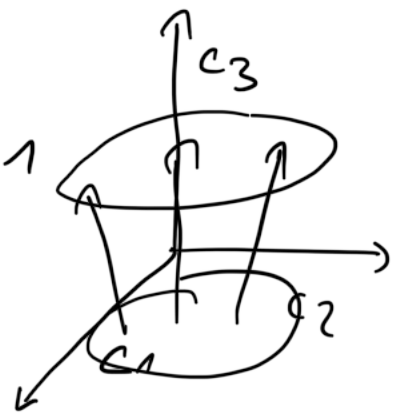
speciálně $n = m = 1$



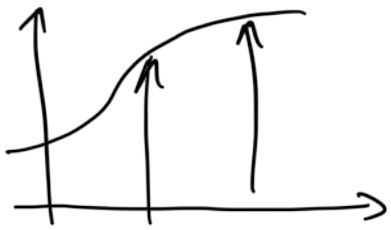
Typický pro hvězdné obory

Budeme se omezovat na případ $n = 2$ $m = 1$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

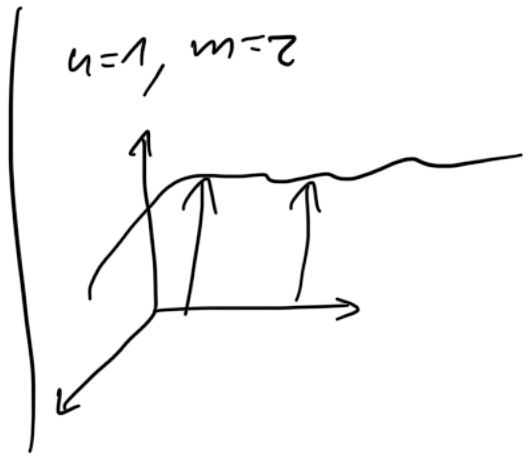


$n = m = 2, 3$ $\quad f: M \to N$



Graf $R \subset M \times N$

$n = 1, m = 2$

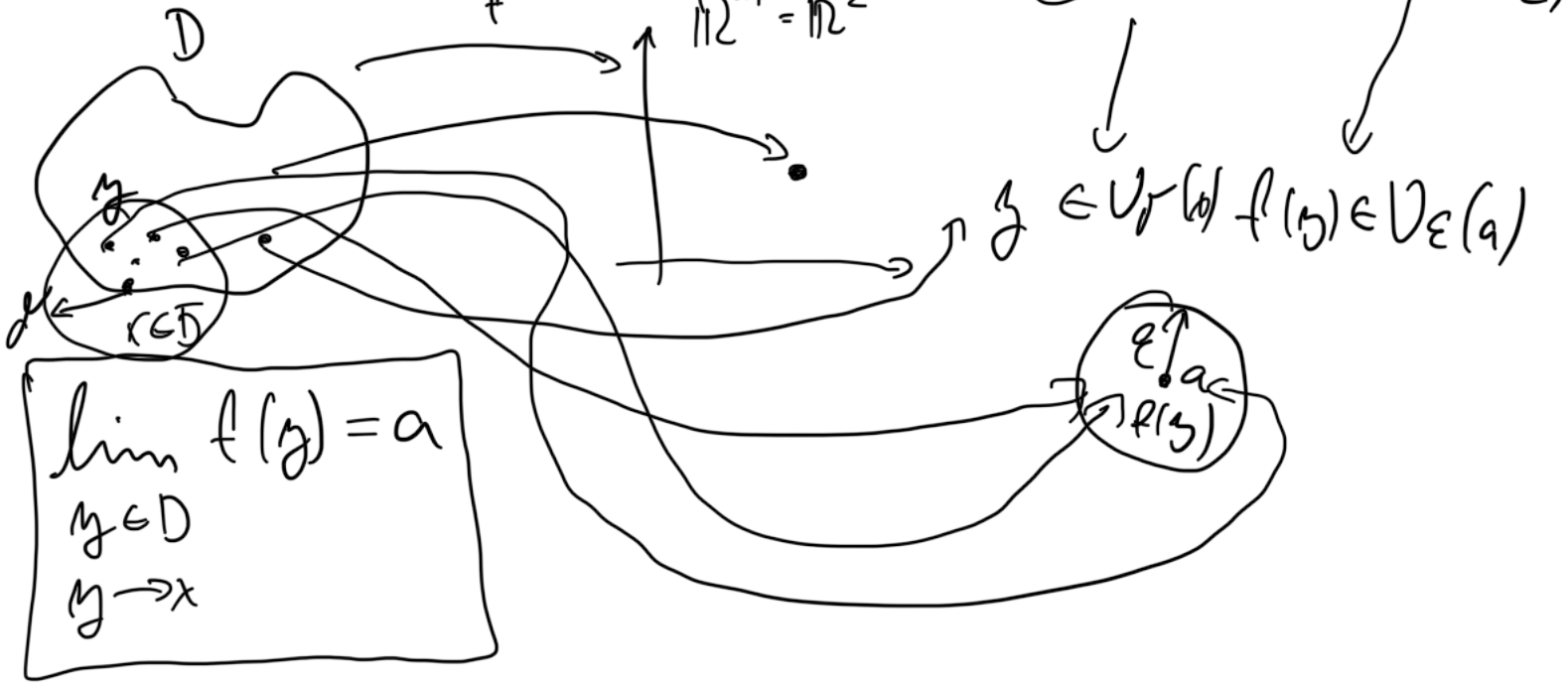


vektorové pole

Definice Řekneme, že funkce $f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$

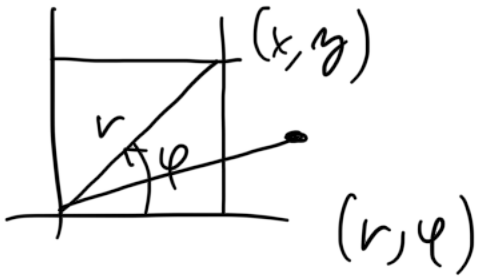
má v bodě $x \in \overline{D}$ limitu $a \in \mathbb{R}^m$

Podrobně platí $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in D)(\|y - x\| < \delta \Rightarrow \|f(y) - a\| < \varepsilon)$



$$\lim_{\substack{y \in D \\ y \to x}} f(y) = a$$

Př. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$



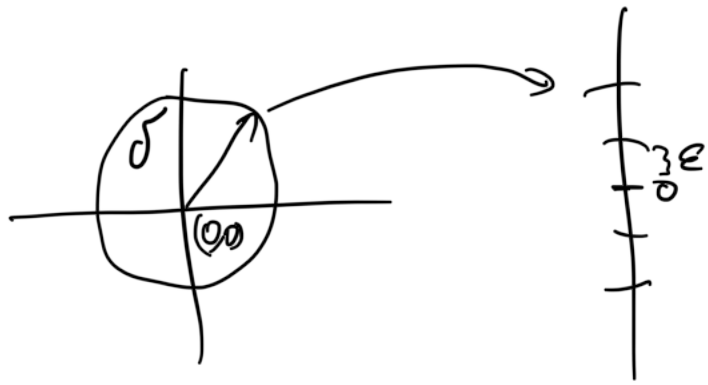
polární souřadnice

$x = r \cos \varphi$

$y = r \sin \varphi$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$



$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$

v polárních: $r < \delta$

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\varphi)^3+(r\sin\varphi)^3}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{r^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1})}$$

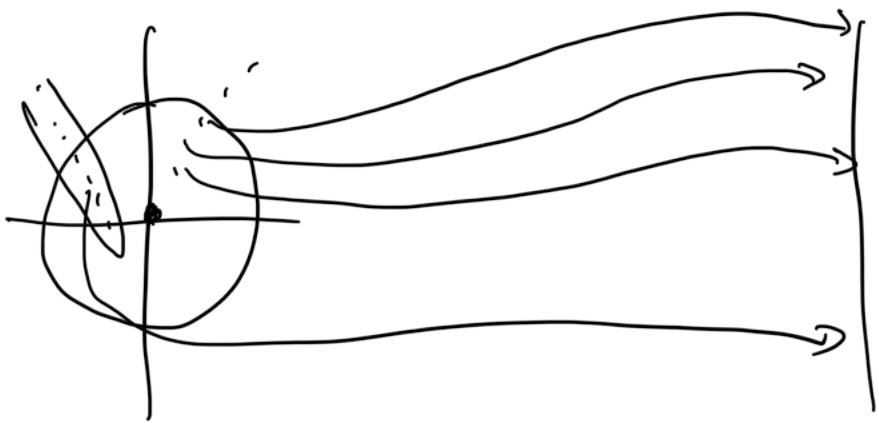
$$= \lim_{r\to 0} r(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi) \leq r\cdot 2 \to 0$$

$(\forall \varepsilon > 0)$ zvol $\delta < \varepsilon/2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$$

$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

Stačí se přesvědčit, že limity pro specifické vyšlé body (x_i) buď neexistují nebo si nejsou rovny



pro přímku $y=0$

vidíme, že $f(x,y)=0 \quad x\neq 0$

$\varphi(x) = f(x,0) = 0 \quad x\neq 0$

$\tilde{\varphi}(x) = f(x,x) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad x\neq 0$

↳ limita neexistuje

Def: Říkáme, že $f : D \to \mathbb{R}^m$ je spojitá v bodě $x \in D$ pokud $f(x) = \lim_{y \to x} f(y)$

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall y \in D)\,(\|y - x\| < \delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon)$$

Def. Říkáme že $f : D \to \mathbb{R}^m$ je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě $x \in D$.

Věty o spojitosti

„Spojitost se zachovává při použití běžných algebraických operací"