Věta: Nechť $f: U \to V$, $g: V \to W$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $W \subseteq \mathbb{R}^k$

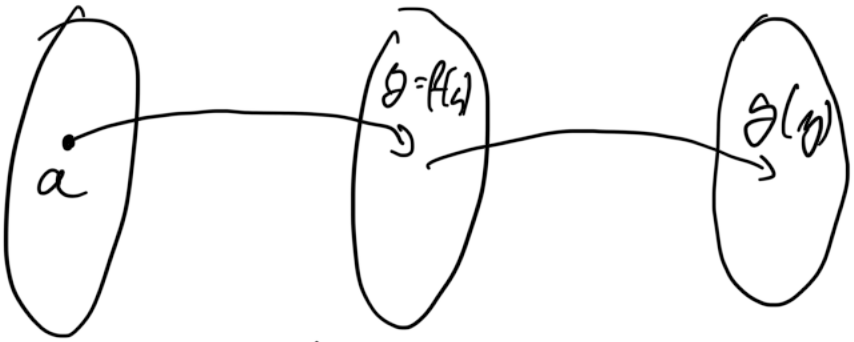
jsou spojité v bodech $a \in U$, resp. $y = f(a) \in V$

Potom funkce $g \circ f : U \to W$ je spojitá v bodě $a \in U$

Dk.

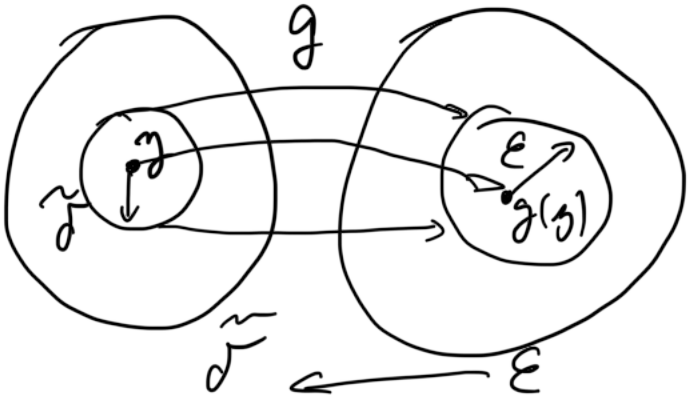
Pozn. $g \circ f(x) = g(f(x)) = h(x)$

kde $h: U \to W$:



Je třeba dokázat.

spojitost: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall z \in U_\delta(x) \;\middle|\; f(z) \in U_\varepsilon(f(x))\right)$



$$U_\delta(a) \to U_{\tilde\delta}(f(a)) \to U_\varepsilon(g\circ f(a))$$

<u>Věta</u> <u>Pol</u> $f, g : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, jsou spojité v bodě $a \in U \Rightarrow f+g$ je také spojitá v bodě a.

Pokud $m=1$ potom též $f \cdot g$ $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě a.

$g(a) \neq 0$.

<u>Věta</u> Pokud $f : U \to \mathbb{R}^m$ $f = (f_1, \dots, f_m)$

kde $f_i : U \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = (xy, \sin(x) - y)$

$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$f_1(x,y) = xy$

$f_2(x,y) = \sin x - y$

Potom f je v bodě $a \in U$ spojitá

$\Updownarrow$

$\forall i$ f_i je v bodě $a \in U$ spojitá

Př. Chceme dokázat, že f je spojitá v každém bodě (tj. f je spojitá).

Použitím o zemích vět

1. krok $f \rightsquigarrow f_1, f_2$

$f_1(x,y) = xy \quad f_1(x,y) = \tilde{f}_1(x,y) \cdot \tilde{\tilde{f}}_1(x,y)$

kde $\tilde{f}_1(x,y) = x$, $\tilde{\tilde{f}}_1(x,y) = y$

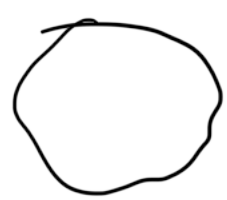
$f_2(x,y) = \tilde{f}_2(x,y) - \tilde{\tilde{f}}_2(x,y)$, $\tilde{f}_2(x,y) = \sin x \quad \tilde{\tilde{f}}_2(x,y) = y$

Věta Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$ je omezená a uzavřená.

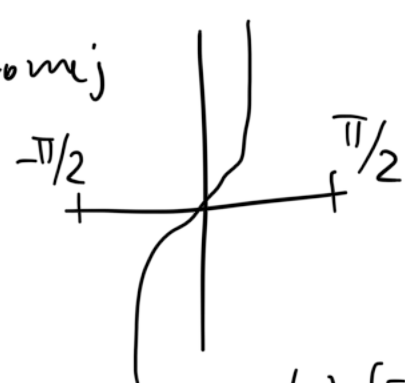
Nechť $f: D \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f je omezená na D, a nabývá svých extrémů, tj.

$(\exists x \in D)(\forall z \subset D)\ f(x) \geq f(z)$.

$(\exists y \in D)(\forall z \in D)\ f(y) \leq f(z)$



Porovnej

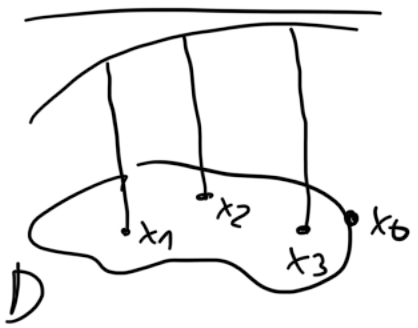


$\tan(x) \cdot (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

Důkaz Budeme dokazovat, zřejmě, že f je shora omezená a že nabývá maxima.

Zvolím tedy posloupnost $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$

tak, aby $f(x^k) \nearrow \sup_{x \in D} f(x)$ (může být $+\infty$)



$$\left.\begin{array}{l} f(y^k) \nearrow \sup f \\ f(x^0) \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ spojitá v } x^0 \\ \text{tedy} \\ f(y^k) \to f(x^0) \end{array}$$

(Tedy $f(x^0) = \sup f$)

Definice Říkáme, že $f: D \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá ($D \subset \mathbb{R}^n$) pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D)(\|x - y\| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

spojitá:

$$(\forall x \in D)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in D)(\|x - y\| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

$\exists \delta \, \forall x$ | $\exists$ barva $\forall$ lib

$\forall x \, \exists \delta$ | $\forall$ lib $\exists$ barva