věta $U \subset \mathbb{R}^n$, ~~pokud~~ $f: U \to \mathbb{R}$

má derivaci v bodě $a \in U$

(derivace $df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Potom

f má v bodě a všechny směrové derivace

$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad \frac{\partial f}{\partial h}(a) = df(a)[h] = \underline{\underline{\operatorname{grad} f(a) \mid h}}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i$$

Dk Označme $L = df(a)$ (derivace)

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + o(\|h\|)$$

$h \neq 0$ pevné $\quad f(x+th) = f(x) + L(th) + o(\|th\|)$

$t \in \mathbb{R}$ $\quad f(x+th) = f(x) + tL(h) + o(t)$

platí $\quad f(x+th) = f(x) + t\frac{\partial f}{\partial h}(a) + o(t)$

$f(x+th) = f(x) + K + o(t)$ ⊘ derivace existuje a je rovna K

Tedy $K = L(h)$ a $\frac{\partial f}{\partial a}(a) = L(h) = df|_a[h]$

zbývá ověřit, že $L = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \right)$.

Toho platí, protože dosazením $h = e_1, e_2, \dots, e_n$

Tedy $L = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $L(e_1) = a_1$

$$L(h) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum a_i h_i$$

Definice $f : \underset{\mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}$ říkáme, že f

je třídy C^n (spojitě diferencovatelná) pokud

$\forall j \ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \ U \to \mathbb{R}$ je spojitá

$$f(x,y) = x^2 + y^2 x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2$$

$$g(x,y) = 2x + y^2 \longrightarrow C^1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot x \rightsquigarrow C^1$$

Věta Nechť $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1

($U \subseteq \mathbb{R}^n$)

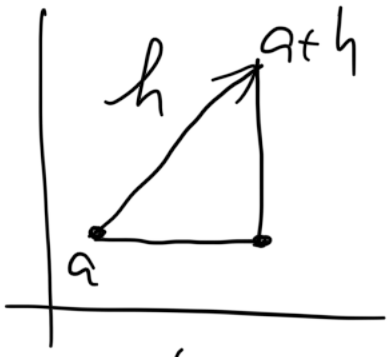
Potom f má v libovolném bodě a derivaci

(totální/úplný diferenciál) $df(a)$

Dk: $f(a+h) - f(a) = "L"(h) + o(\|h\|)$

$\uparrow$

? ?

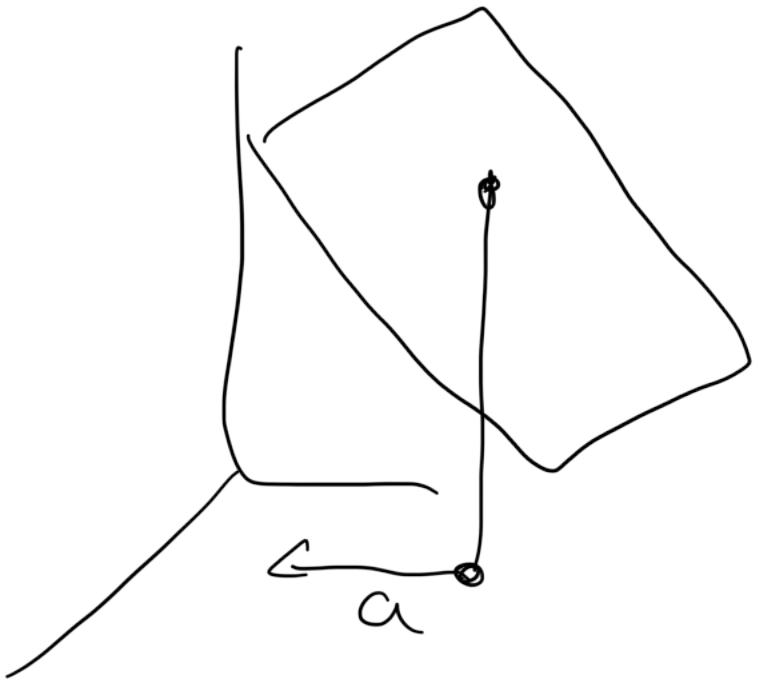


$h = (h_1, h_2)$

Věta Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$, $f: V \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in V$ derivaci $df(a)$. Potom vektor gradientu udává směr nejrychlejšího růstu funkce f v okolí a. Vektor $(df(a), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ je kolmý na graf v bodě a

pokud je kolmý na tečnou rovinu ke grafu

Dk $f(a+h) = f(a) + \operatorname{grad} f(a) \cdot h + o(\|h\|)$



zvolme λ pevně, $\lambda \to 0$

budeme zkoumat růst $f(a+h)$ kde $\|h\| = \lambda$

$f(a+h) = f(a) + \operatorname{grad} f(a) \cdot h$

$+$ členy rychleji než $\|h\|$