Př. Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce

$f(x,y) = x^3 + y^3$ v bodě $(x,y) = (1,2) = (a_1, a_2)$

Víme $-(x^3 - f(1,2)) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(1,2) \cdot (x_i - a_i) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$

$x_1 = x$
$x_2 = y$
$x_3 = z$

$-(z - 9) + 3(x-1) + 12(y-2) = 0$

$(\text{grad } f, -1) \cdot (x_1 - a_1, \dots, x_4 - a_4) = 0$

Najděte úhel, pod kterým se protínají grafy funkcí

$f(x,y) = x^3 + y^3$

$g(x,y) = x^2 + y^2 + 4$

v bodě $a = (1,2,9)$

poznámka:

1. krok: grafy $\longrightarrow$ tečné roviny (úhel)

$\longrightarrow$ 2. krok: $\longrightarrow$ úhel mezi normálovými vektory

Tedy pro řešení najdeme normálové vektory v bodě a

Pro f: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) = (3, 12, -1)$

Pro g: $\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, -1\right) = (2, 4, -1)$

$$\cos\varphi = \frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{6+48+1}{\sqrt{\quad}\cdot\sqrt{\quad}}$$

Definice Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$, $f: V \to \mathbb{R}$

Říkáme, že f nabývá v bodě $a \in V$

(absolutního) maxima pokud $f(a) \geq f(x)$, $x \in V$

minima $f(a) \leq f(x)$, $x \in V$

lokální maximum pokud $(\exists \delta > 0)(\forall y \in U_\delta(a) \| f(a) \geq f(y)$

minimum $(\quad)(\quad | \quad f(a) \leq f(y)$

Extrémy → (min, max)

Poznámka Již víme, že pokud V je omezená a uzavřená.

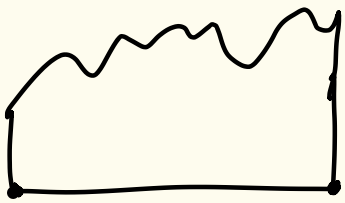
a $f: V \to \mathbb{R}$ je spojitá $\Rightarrow \exists \max f$ $\min f$

Věta Nechť $f: V \to \mathbb{R}$ je třídy C^1 (tedy $df: V^0 \to \mathbb{R}$ je spojitá)

Pokud $a \in V^0$ je bodem lokálního extrému, potom

$df(a) = o = (0, \dots, 0)$

$\text{grad } f(a) = \vec{0}$



Def Pokud $df(a)=0$ říkáme, že a je kritický bod f.

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + \operatorname{grad} f(a)\cdot h}_{\text{"lineární část"}} + \sigma(\|h\|)$$

$\sigma(\|h\|)$ ↓ chyba, kvadratická

Předpokládáme, že a bodem lokálního extrému.

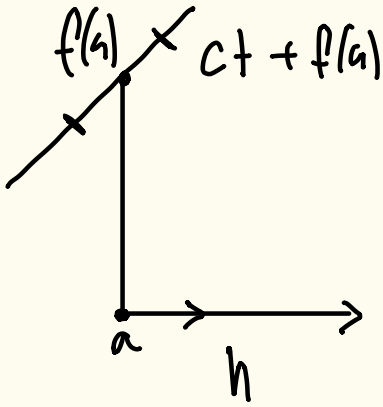
Spor: předpokládejme, že $\operatorname{grad} f(a) \neq \vec{0} = (p_1, \dots, p_n)$

kde nějaké $p_j \neq 0$ (např. $p_1 \neq 0$)

tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(a) \neq 0$ | zvolím $h = (t, 0, 0, 0)$

$$f(a+th) = f(a) + t\operatorname{grad} f(a)\cdot h + \sigma(t) + t\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)}_{c}\cdot 1 + \sigma(t)$$

$$f(a+th) = f(a) + c\cdot t + \sigma(t) \quad c \neq 0$$



Takže pro t dostatečně malé

$$ct \gg \sigma(t)$$

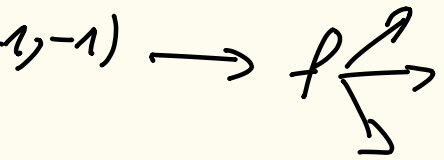
tedy pro t malé $f(a+th)$ nabývá větších i menších hodnot než $f(a)$. **SPOR** s tím, že extrém

Příklad Nalezněte kritické body $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Tedy $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) = (4x^3 - 4y,\ 4y^3 - 4x)$

$4x^3 - 4y = 0 \longrightarrow x^9 = x, \quad x(x^8 - 1) = 0 = x = 0$ nebo $x^8 = 1$ $\nearrow x = 1$ $\searrow x = -1$

$4y^3 - 4y = 0$

Kritické body: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$ $\longrightarrow$ f 

Je vidět, že pro k dostatečně velké platí:

Pokud $\|(x,y)\| > k \Rightarrow f(x,y) > 10$

Tedy pokud f nabývá hodnot menších než 10, tedy uvnitř nějaké uzavřené množiny

Tedy f nabývá hodnot menších než 10 uvnitř nějaké uzavřené množiny.

Navíc vidíme, že $a \in V^\circ$

Tedy $\Rightarrow$ v bodě a (který je bodem absolutního minima)

$a \in V^\circ \Rightarrow a$ je kritický bod. Tedy z bodů podezřelých $f \to \dots$

Diferenciál (pouze derivace) funkce $f: \underset{\cap}{U} \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$

Definice Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$

Derivace f v bodě a je lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

splňující: $$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

Pokud takové L existuje, $df(a) = L$. $df(a) = L$.

$df(a) = L$. $df(a)[h] = L(h)$

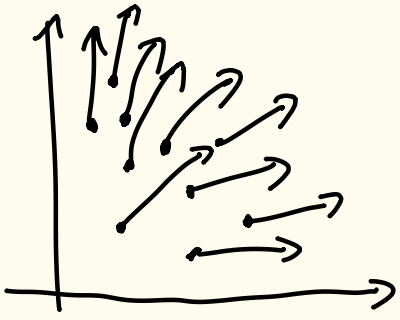
Fakt: L je derivací f v bodě a

$$\Updownarrow$$

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

Př. $f(x,y) = (x \cdot y, \sin(x) - y)$ $\quad L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Uvažujeme $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, nám stačí $(1, \dots, 0)$ $(0, 1, \dots)$