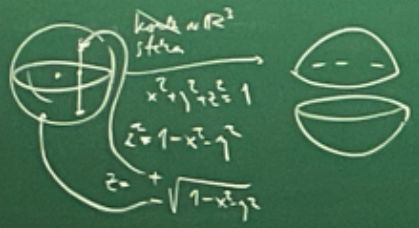
# Implicitní funkce a Lagrangeovy multiplikátory



**Věta** (O implicitní funkci)

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $F: U \to \mathbb{R}$ je $C^1$, $F(a)=0$, a předpokládejme, že některá $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) \neq 0$ (pro nějaké $i$).

Potom existuje $U_\delta(a)$ na kterém je jednoznačně definovaná funkce $C^1$ $h$, taková, že $x_i = h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ splňuje $F(x_1, \dots, x_{i-1}, h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$. Navíc $\operatorname{grad} F(a)$ je kolmý na graf $h$.

---

Parabola s dírkou $F(x,z)=0$

$i=n$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(\ ) = 0$

Ukažme si, za předpokladu že $h$ existuje, na příkladu $\operatorname{grad} h(a)$ ($dh(a)$).

$i=n$ BÚNO

$F(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$.

$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0$

$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$ $i = 1, \dots, n-1$

$\operatorname{grad} h(a) = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(a)}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)}, \dots, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}(a)}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)}\right)$

$\perp$ graf $h$

$(\dots, -1) \perp \operatorname{graf} F(a)$

$\left(\frac{\partial F(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(a)}{\partial x_n}\right)$

---

**Věta** (Lagrangeovy multiplikátory)

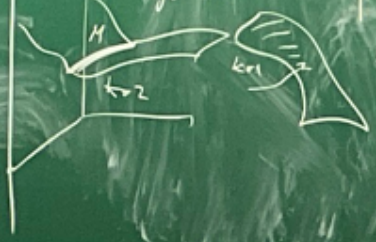
Nechť $f, g_j : U \to \mathbb{R}$, $C^1$, označme $M = \{x \in U;\ g_j(x)=0\ \forall j\}$, $j = 1, \dots, k$

Předpokládejme, že $dg_j(x)$ jsou lineárně nezávislé na $U$ ($\operatorname{grad} g_j(x)$)

Jestliže $a \in U$ je bodem lokálního extrému $f$ na $M$, potom $\exists \lambda_1, \dots \lambda_k$

Tj. platí $\operatorname{grad} f(a) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(a)$ "$g_j$ vazebné podmínky"

$k=2$




$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$f(x,y,z) = x\,y\,z$

---

DÚ $k=1$ $f(x_1, \dots, x_n)$, $g(x_1, \dots, x_n)$

$g(a) \neq 0$, $\operatorname{grad} g(a) \neq 0$, BÚNO $\frac{\partial g(a)}{\partial x_n} \neq 0$

– podle věty o implicitní funkci $\exists h: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ $C^1$

$g(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ $x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$

$\frac{\partial h(a)}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}}$

extrém $f(x_1, \dots, x_n) \leftarrow f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$ Bez vazby

(platí v lokálním $U_\delta(a)$).

Bez vazby $\frac{\partial}{\partial x_j}(\ ) = 0$ $j = 1, \dots, n-1$

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial h(a)}{\partial x_j} = 0$ $j = 1, \dots, n-1$

$\frac{\partial h(a)}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}}{\frac{\partial f}{\partial x_n}}$

$\frac{\frac{\partial f(a)}{\partial x_j}}{\frac{\partial f(a)}{\partial x_n}} = \frac{\frac{\partial g(a)}{\partial x_j}}{\frac{\partial g(a)}{\partial x_n}}$ $j = 1, \dots, n-1$

$\frac{\frac{\partial f(a)}{\partial x_n}}{\frac{\partial g(a)}{\partial x_n}} = \lambda$

$\frac{\partial f(a)}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial g(a)}{\partial x_j}$ $j = 1, \dots, n-1$

$j = n$ také platí $\Leftrightarrow$

$\lambda \operatorname{grad} g(a) = \operatorname{grad} f(a)$