Najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ve všech bodech $a\in\mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá?

---

derivace fce f v bodě $a_0\in D(f)^\circ$ (vnitřní bod $D(f)\subseteq\mathbb{R}^n$) podle vektoru $\vec{h}\in\mathbb{R}^n$ je hodnota:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0):=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_0+t\cdot\vec{h})-f(a_0)}{t}$$

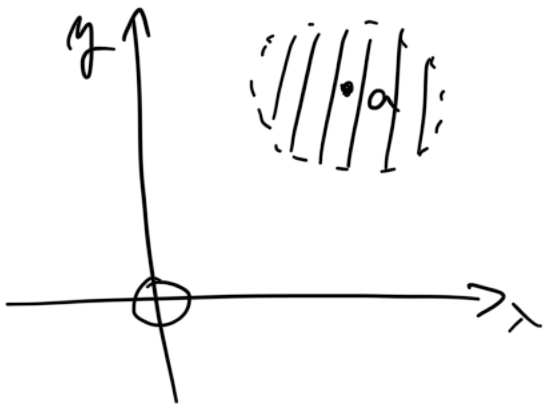
speciálně pro kanonický vektor $\vec{e_i}=(0,0,\dots,\underset{\uparrow}{1},0,\dots 0)$ se definuje
i-tá pozice

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0):=\frac{\partial f}{\partial e_i}(a_0)$$

$\vec{e_1}=(1,0)\quad a_0=(x_0,y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_0+t\vec{e_1})-f(a_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$=\frac{d}{dt}f(t,y_0)\Big|_{t=x_0}$$



pro body $a \neq (0,0)$ máme nějaké dodí, které neobsahuje $(0,0)$ a funkce zde má předpis $\frac{x^3}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x\cdot x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad (\text{pro } (x,y)\neq(0,0))$$

případ $a=(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^3} = 1$$

máme funkci $g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

spojitost g? v bodech $a \neq (0,0)$ plyne z věty o složení spojitých fcí

v bodě $(0,0)$: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \overset{?}{=} g(0,0)$

$$\| $$

$$\frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

přiblížení po $x=y$

$$g(x,x)=\frac{x^4+3x^2x^2}{(x^2+x^2)^2}=\frac{x^4+3x^4}{(2x^2)^2}=\frac{4x^4}{4x^4}=1 \xrightarrow{x\to 0} 1$$

přiblížení po ose x, $y=0$

$$g(x,0) \quad \frac{x^4+0}{(x^2)^2}=1 \xrightarrow{x\to 0} 1$$

přiblížení po ose y, $x=0$

$$g(0,y)=\frac{0+0}{y^4}=0 \xrightarrow{y\to 0} 0 \Longrightarrow \lim \text{ neexistuje}$$

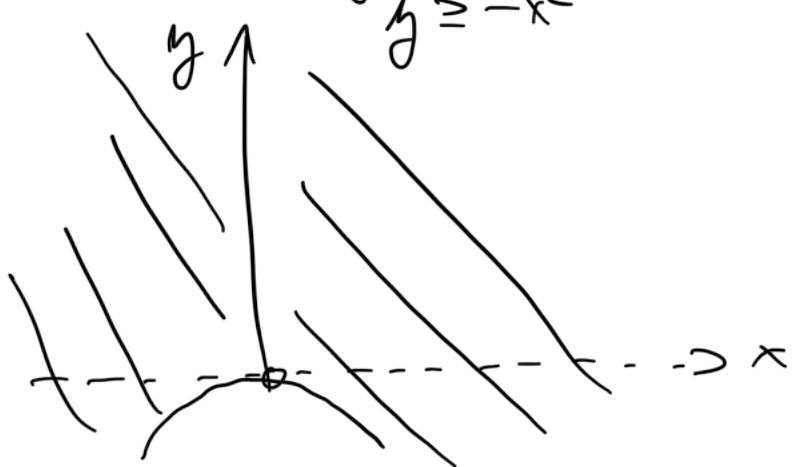
Najděte parciální derivace podle všech proměnných funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y}\cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right)$

všude, kde existují

$D(f)=x^2+y \geq 0 \wedge y\neq 0$

$y\geq -x^2$

$D(f)^0$: $y>-x^2 \wedge y\neq 0$

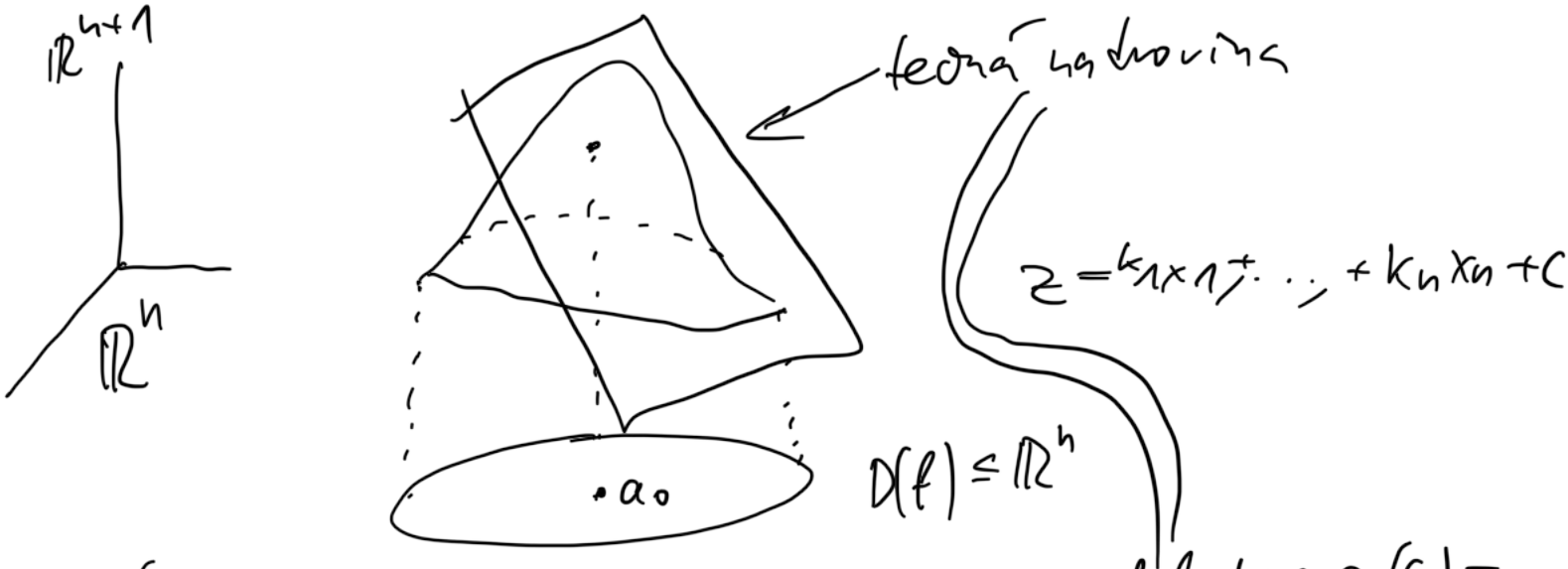


$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y}\cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{2x\cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right)}{2\sqrt{x^2+y}} + \frac{\sqrt{x^2+y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\sqrt{x^2+y}\cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}\cdot \sin\frac{x}{y} + \sqrt{x^2+y}\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{x}{-y^2}\right)$$

Pro funkci $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ v bodě $a_0 = (1,1)$ určete

- totální diferenciál
- tečnou rovinu
- derivaci ve směru $\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1/2\right)$
- úhel který svírá tečná rovina s rovinou $z=0$.



graf funkce $g(q) =$

$= k_1(x_1 - a_1) + \ldots + k_n(x_n - a_n) + f(a_0)$

$a = (x_1, \ldots, x_n)$

f má totální diferenciál $df(a_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (což je lin. zobrazení)

$$\Leftrightarrow \lim_{a \to a_0} \frac{f(a)-g(a)}{\|a-a_0\|} = 0$$

ex. $df(a_0) \Rightarrow$ ex. $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0)$ pro všechna $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$

a navíc $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) = df(a_0)[\vec{h}]$

a ještě víme

$df(a_0) = (df(a_0)[\vec{h_1}], \dots, df(a_0)[\vec{h_n}])$

matice $df(a_0)$... $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0)$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)$

- totální diferenciál

$$df(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = (1/2, -1/2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y}\Bigg|_{(1,1)} = 1/2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{(-x)}{y^2}\Bigg|_{(1,1)} = 1/2 \cdot (-1) = -1/2$$

↑ funkce existují a jsou spojité na nějakém okolí bodu $(1,1)$ $\Rightarrow$ ex. $df(1,1)$

tečná rovina: $z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$

$a = (x, y) \Rightarrow a - a_0 = (x-1, y-1)$

$a_0 = (1,1)$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$$

$$\boxed{z = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{y}{2}}$$

- derivace ve směru vektoru $\vec{n}$ (pozn. směr je vektor velikosti 1)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(a_0) = df(a_0)[\vec{n}] = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

- úhel, který svírá tečná rovina s rovinou $z = 0$ pro normálové vektory $\vec{n_1}$ a $\vec{n_2}$ rovin ρ_1 a ρ_2 je úhel mezi rovinami dán jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\| \cdot \|\vec{n_2}\|}$$

pak je $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

$\vec{n_1}$ norm. vektor tečné roviny

$\vec{n_2}$ norm. +1 - roviny z $\Rightarrow 0$

$\vec{n_1} = (1/2, -1/2, -1)$

$\vec{n_2} = (0,0,1)$

$$\frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\| \cdot \|\vec{n_2}\|} = \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$\cos\alpha$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$$