funkce f je třídy C^2 na U (otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^n$)
$\Leftrightarrow$ všechny funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existují a jsou spojité na U $\forall i,j = 1,\dots,n$

---

pro f třídy C^2 na U a $a_0 \in U$ je druhá derivace homogenní kvadratickým polynomem $d^2 f(a_0)$ vrcholný Hessovou maticí

$$Hf(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}\Bigg|_{a_0} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \\ \vdots \\ \operatorname{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \end{pmatrix}\Bigg|_{a_0} =$$

$= d\Phi(a_0)$ ↓ Jacobiho matice pro Φ v a_0

$$\Phi = df : U \to \mathbb{R}^n$$
$$a \longmapsto df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

$$\vec{h} = (h_1 \dots h_n)$$
$$d^2 f(a_0)[\vec{h}] = (h_1, \dots, h_n)\, Hf(a_0) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Najděte Taylorův polynom druhého řádu pro funkci $f(x,y) = x \cdot e^{\sin y}$ v bodě $a_0 = (-1,0)$ a pomocí něj přibližně vypočtěte hodnotu $f(0{,}9;\ 0{,}1)$

$$T_2(x,y) = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0] + \frac{1}{2!} d^2 f(a_0)[a - a_0]$$

$a = (x,y)$

$= (*)$

$$df(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{a_0} = \left(e^{\sin y}, x e^{\sin y}\cos y\right)\Big|_{a_0} =$$

$$= \left(e^{\sin 0}, -1\, e^{0}\cos 0\right) = \underline{\underline{(1,-1)}}$$

$$d^2 f(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\sin y}\cos y \\ e^{\sin y}\cos y & x e^{\sin y}(\cos^2 y - \sin y) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x \cdot e^{\sin y}\cos y\right) = x\left(e^{\sin y}\cdot\cos^2 y + e^{\sin y}\cdot(-\sin y)\right) = x e^{\sin y}(\cos^2 y - \sin y)$$

$$d^2 f(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(*) = -1 + (1,-1)\cdot\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x+1, y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= -1 + x + 1 - y + \frac{1}{2}\left(0\cdot(x+1)^2 + 2\cdot(x+1)\cdot y - y^2\right)$$

$$f(0{,}98;\,0{,}01) \doteq T_2(0{,}98;\,0{,}01) = -1 + 0{,}02 - 0{,}01 + \tfrac{1}{2}(2\cdot 0{,}02 - 0{,}01 + \tfrac{1}{2}(2\cdot 0{,}02\cdot 0{,}01 - (0{,}01)^2)$$

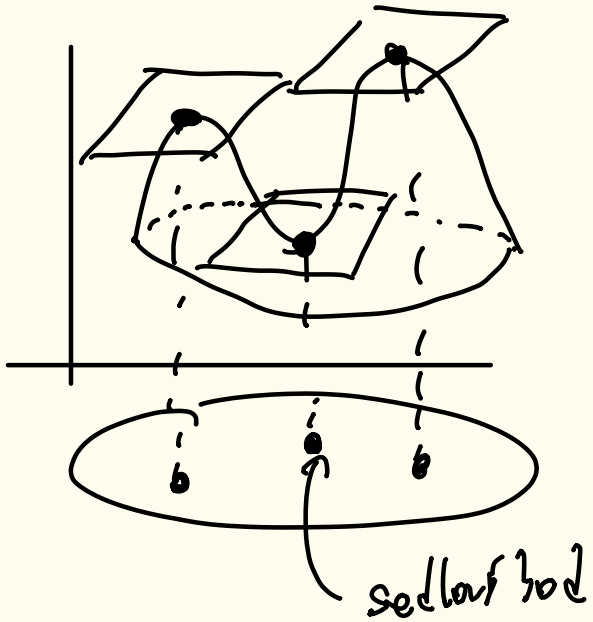
$$a - a_0 = (-0{,}98;\,0{,}01) - (-1,0) =$$

$$= (\underbrace{0{,}02}_{x+1};\,\underbrace{0{,}01}_{y})$$

$x = x$

$$e^{\sin y} = 1 + y + O(y^2)$$

Lokální extrémy funkce na otevřené množině



pro funkci f třídy C^2 na otevřené množině U

nutná podmínka pro lok. extrém f v $a_0 \in U$

$df(a_0) = (0, \dots, 0)$

postačující podmínka — II —

$d^2f(a_0)$ pozitivně definitní $\Rightarrow$ v a_0 je lok. minimum

negativně — II — $\Rightarrow$ — II — maximum

indefinitní — II — $\Rightarrow$ není lok. extrém a je zde sedlo

Najděte lokální extrémy funkce

$f(x,y) = x^3 - y^3 + 2xy + 6$ (na $U = \mathbb{R}^2$)

$df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3x^2 + 2y, -3y^2 + 2x) \stackrel{?}{=} (0,0)$

$3x^2+2y=0 \rightarrow \frac{-3x^2}{2}=y$

$-3y^2+2x=0$

$-3\left(\frac{-3x^2}{2}\right)^2+2x=0$

$-3\left(\frac{9x^4}{4}\right)+2x=0$

$-\frac{27x^4}{4}+2x=0$

$-27x^4+8x=0$

$x(-27x^3+8)=0 \quad x=0 \vee -27x^3+8=0$

$27x^3=8$

$x^3=\frac{8}{27} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$

$x=0$ or $\frac{2}{3}$

$(x,y)=\begin{cases}(0,0)\\(\frac{2}{3},-\frac{2}{3})\end{cases}$

$d^2f(x,y)=\begin{pmatrix}6x & 2\\ 2 & -6y\end{pmatrix}$

$d^2f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\Delta_1=0\\ \Delta_2=-4\end{matrix}$ → indefinitní (sedlový bod)

$d^2f(\frac{2}{3},-\frac{2}{3})=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{matrix}\Delta_1=4\\ \Delta_2=12\end{matrix}$ → pozitivně definitní (lok. min.)

$A\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$ ... $Q(\vec{h})=\vec{h}^T A \vec{h}$

Q je pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall i=1,\dots,n \ \Delta_i>0$

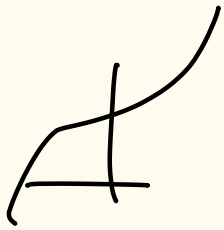
Q je negativně definitní $\Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\Delta_i)=(-1)^i$

$-,+,-,+,\dots$

pokud $\det A \neq 0$ pak

B je indefinitní $\Leftrightarrow$ vlastní čísla opač. znam. definitní

$g(x) = f(x,0) = x^3 + 6$



↖ ke f je nemá max. ani minimum

Najděte loh. extrémy funkce

$f(x,y,z) = 1/z + z/y + y/x + x \quad D(f): x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2}+1, \frac{-z}{y^2}+\frac{1}{x}, -\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y}\right)$

$$\begin{cases} -\frac{y}{x^2}+1 \\ \frac{-z}{y^2}+\frac{1}{x}=0 \\ -\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y}=0 \end{cases} \rightarrow$$

$y = x^2 \rightarrow y = \frac{y^4}{z^2} \quad z^2 = y^3$

$x = \frac{y^2}{z}$

$y = z^2 \qquad y = y^3$

$y^3 - y = 0$

$y(y^2-1) = 0 \qquad y \neq 0$

$y = 0 \vee y^2 - 1 = 0$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1 \qquad y = \cancel{0} \vee -1 \vee 1$

$(x,y,z) \begin{cases} (1,1,1) \\ (1,1,-1) \end{cases}$

$$\nabla^2 f(x,y,z) \begin{pmatrix} 2\frac{y}{x^3} - \frac{1}{x^2} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & 2\frac{z}{y^3} - \frac{1}{y^2} \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \quad 2\frac{1}{z^3} \end{pmatrix}$$

$$d^2f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 4-1 = 3 \\ \Delta_3 = 8+0+0-0-2-2 = 4 \end{matrix}$$

pozitivně definitní

$v(1,1,1)$ lok. min

$$d^2f(-1,1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Delta_1 = -2 \\ \Delta_2 = 4-1 = 3 \\ \Delta_3 = -8+0+0-0+2+2 = -4 \end{matrix}$$

negativně definitní v $(-1,1,-1)$ je lokální maximum