B0B01PST Pravděpodobnost a statistika - zkouškový test 19.5.2022 (přednášející HELISOVÁ, cvičící BECK / KORBELÁŘ)

Jméno a příjmení	1	2	3	4	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 43 bodů)
Lodě v jistém přístavu jsou pronajímány turistům (tzv. charter). V nabídce jsou plachetnice a motorové jachty, jejichž počty jsou v poměru 2:1. Na každé lodi dojde průměrně jednou za 6 týdnů k nějaké poruše, přičemž u plachetnic se 1/4 poruch týká motoru, zbytek jsou poruchy jiného druhu, u motorových jachet se motoru týká 1/3 poruch, zbytek jsou poruchy jiného druhu. Jeden opravář má na starosti 12 lodí. Spočtěte pravděpodobnost, že

a) pokud dojde k poruše na nějaké lodi, jedná se o poruchu na motoru plachetnice, (5 bodů) Bayes
b) pokud dojde k poruše na nějaké plachetnici, jedná se o poruchu na motoru, (5 bodů) Bayes
c) pokud dojde k poruše na motoru na nějaké lodi, jedná se o poruchu na plachetnici, (5 bodů) Bayes
d) opravář bude čekat na další poruchu motorové jachty alespoň jeden a půl týdne, (7 bodů) Exponenciální / Poisson
e) během dvou týdnů bude muset opravář řešit alespoň tři poruchy motoru, (7 bodů) Poisson
f) mezi pěti poruchami budou nejvýše dvě z nich na motorové jachtě, (7 bodů) Binom?
g) mezi 50 poruchami bude nejvýše 20 z nich na motorové jachtě. (Řešte pomocí CLV; 7 bodů) CLV

Úloha 2. (celkem 17 bodů)

a) Definujte nezávislost náhodných jevů A, B, C. (5 bodů)
b) Definujte nezávislost náhodných veličin X, Y, Z. (5 bodů)
c) $P(A \cup B) = 0,7$, $P(A \setminus B) = 0,2$, $P(A^c) = 0,6$. Jsou jevy A a B nezávislé? Matematicky zdůvodněte. (7 bodů)

Úloha 3. (celkem 12 bodů)
Agentura nabízí studentům brigádu sbírání jablek. Slibuje průměrný denní výdělek 100 EUR. Brigádníci jsou však placeni od množství nasbíraného ovoce a u náhodně vybraných studentů byly zjištěny následující denní výdělky (uvedeny v EUR):

98	101	94	98	103	97	100	95	96

Statisticky otestujte na hladině 5%, zda tvrzení agentury lze považovat za pravdivé, vůči

a) alternativní hypotéze, že průměrný denní výdělek není 100 EUR,

b) vhodně (smyslupně) zvolené jednostranné alternativní hypotéze.

(Hint: $\sum x_i = 882$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 68$)

testovací hypotéza

Úloha 4. (celkem 28 bodů)

kontingenční tabulka

Hotel nabízel čtyři různé snídaně a sledoval jejich oblíbenost mezi muži, ženami a dětmi. Pozoroval následující:

snídaně → skupina ↓	vločky s jogurtem	croissant s nutellou	anglická snídaně	toast se šunkou a sýrem
muži	20	30	100	50
ženy	100	50	30	20
děti	50	300	50	200

a) Uvažujme náhodnou veličinu X popisující, zda je náhodně vybraný host dospělý ($X = 1$) nebo dítě ($X = 0$). Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr rozdělení X. (7 bodů)

b) Statisticky otestujte na hladině 1%, zda jsou všechny snídaně přibližně stejně oblíbené. (7 bodů)

Úloha 5. (celkem 14 bodů)

Markov-chain

Hráči A a B opakovaně házejí jednou kostkou. Hráč A vyhraje, pokud padne šestka, hráč B vyhraje, pokud padnou dvě lichá čísla za sebou, jinak se hraje dál. Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí výhrou hráče A?

(Úloha 1)

Ze zadání víme

Pl ... plachetnice Y ... jacht

M ... motor P ... porucha

$$P(M|Pl) = 1/4 \qquad P(M|Y) = 1/3$$

$$P(Y) = 1/3 \qquad P(Pl) = 2/3$$

(a) $P(M \cdot Pl \mid P) = P(M|Pl) \cdot P(Pl) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

(b) $P(M|Pl) = 1/4$

(c) $P(Pl|M) = \dfrac{P(M|Pl)\,P(Pl)}{P(M)} = \dfrac{1/4 \cdot 2/3}{5/18} = (*)$

$$P(M) = P(M|Pl) \cdot P(Pl) + P(M|Y)\,P(Y) = 1/4 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1/3 =$$
$$= 2/12 + 1/9 =$$
$$= 1/6 + 1/8 = 5/18$$

$$(*) = \frac{2/12}{5/18} = \frac{2 \cdot 18}{5 \cdot 12} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

(d) $X \dots Po(\lambda)$ X ... počet poruch lodí za jeden a půl týdne

průměrně 1 porucha za 6 týdnů → 1/6 poruchy / týden

12 lodí: průměrně 2 poruchy / týden → 3 poruchy / 1,5 týdne

motorové jachty všech lodí tvoří 1/3 flotily

$$P(X=0) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1}{0!} e^{-1} = e^{-1} \approx 3{,}78\%$$

(e) Y ... počet poruch motorů / 2 týdny

$Y \sim Po(\lambda)$

průměrně $1\,p\,/\,6t \rightarrow 1/6\,p\,/\,1t = 2/6\,p\,/\,2t$

8 plachetnic 4 jachty

$8 \cdot 2/6 \cdot 1/4 + 4 \cdot 2/6 \cdot 1/3 = 4/6 + 4/9 = 20/18 = 10/9$ p. m. / 2t

$P(Y=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - \left(P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \right)$

$= 1 - \left(\frac{\frac{10}{9}^0}{0!} e^{-\frac{10}{9}} + \frac{\frac{10}{9}^1}{1!} e^{-\frac{10}{9}} + \frac{\frac{10}{9}^2}{2!} e^{-\frac{10}{9}} \right) =$

$= 1 - e^{-\frac{10}{9}} \left(1 + \frac{10}{9} + \frac{50}{81} \right)$

(f) mezi 5 porucham; nejvýše dvě na jachtě

Z ... počet poruch

$Z \sim Binom(n, p)$ $\quad n = 5$

$p = 1/3 \rightarrow$ porucha na jachtě

$P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$P(Z \leq 2) = P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2)$

$= \binom{5}{0} 1/3^0\, 2/3^5 + \binom{5}{1} 1/3^1\, 2/3^4 + \binom{5}{2} 1/3^2\, 2/3^3 \simeq 0{,}79$

(g) X_i ... porucha

$X_i = 0$ ... porucha není na motorové jachtě

$X_i = 1$ ... porucha je na motorové jachtě

$P(X_i = 0) = 2/3 \quad P(X_i = 1) = 1/3 \quad X_i \sim Alt(p) \quad = 1/3$

$EX = 1/3$ $\text{var}X = 1/3(2/3 = 2/9$

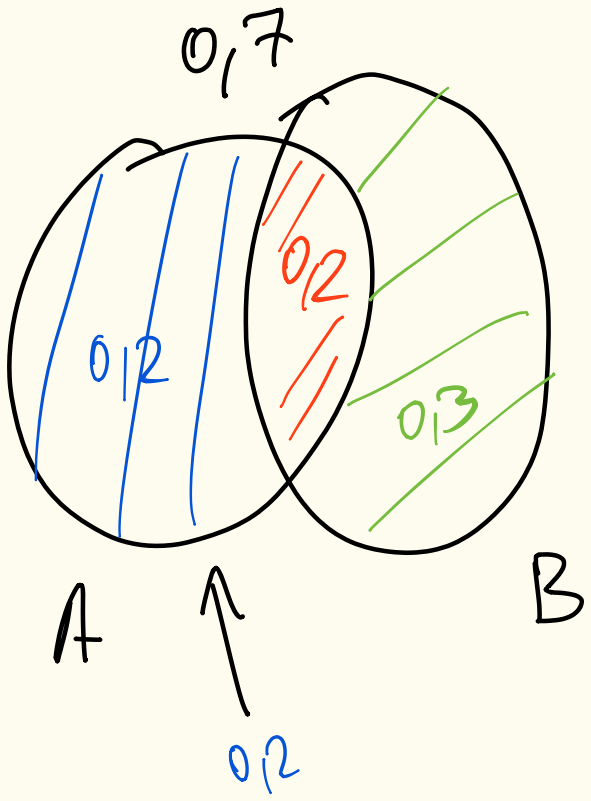
$P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i \le 20\right) = P\left(\sum^{50} X_i \le 20\right) = 1 - P\left(\frac{\sum X_i - 50 \cdot 1/3}{\sqrt{50 \cdot 2/9}} \le \frac{20 - 50 \cdot 1/3}{\sqrt{50 \cdot 2/9}}\right)$

z

(Úloha 2)

$\Phi(1) \approx 0{,}84$

(c) $P(A) = 0{,}4$ $P(A \cup B) = 0{,}7$



$P(A \cap B) = P(A) - P(A \setminus B)$

$= 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$

$P(B) = P(A \cup B) - P(A) +$

$P(A \cap B) =$

$= 0{,}7 - 0{,}4 +$

$0{,}2 = 0{,}5$

$P(A) = 0{,}4$

$P(B) = 0{,}5$

$P(A \cap B) = 0{,}2$

$P(A)P(B) = 4/10 \cdot 5/10 = 20/100 = 0{,}2$

Jevy jsou nezávislé.

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(Úloha 3)

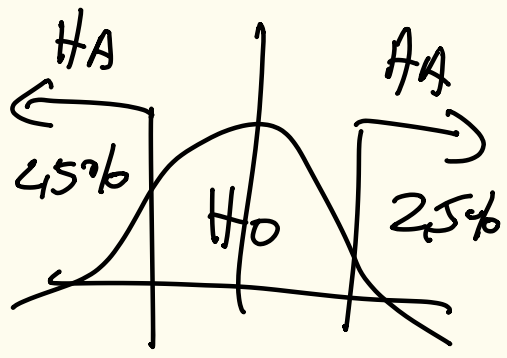
$\overline{x_9} = \frac{\sum x_i}{9} = \frac{882}{9} = 98$

$t_{8;0,975} = 2{,}31$

$s_9^2 = \frac{68}{8} = \frac{34}{4} = \frac{17}{2} = 8{,}5$ $s_9 = \sqrt{8{,}5}$

95% CI $= \left(98 \pm 2{,}31 \cdot \frac{\sqrt{8{,}5}}{\sqrt{9}}\right)$ cca 1

cca $(95{,}69;\ 100{,}31)$

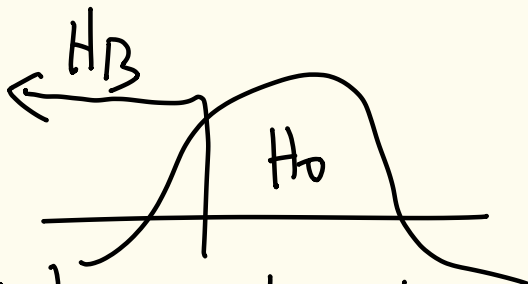


Hypotézu ve prospěch H_A nezamítáme

H_B: výdajů je menší než 100 EUR

$t_{8;0,95} = 1{,}86$ $98 \pm 1{,}86$

$(96{,}14;\ 99{,}86)$



Hypotézu H_A zamítáme ve prospěch H_1

(Úloha 4)

	vločky	croissant	english	toast	celkem
muži	20	30	100	50	200
ženy	100	50	30	20	200
děti	50	300	50	200	600
celkem	170	380	180	270	1000

$P(X=0) = \frac{600}{1000} = 0{,}6$ $\quad X \sim Alt(p)$ $\quad p = 0{,}4$

$P(X=1) = 0{,}4$

MMV: $P(X=1) = p$ a $P(X=0) = 1-p$

$$L(p) = p^{400}(1-p)^{600}$$

$$\ell(p) = 400 \ln(p) + 600 \ln(1-p)$$

$$\ell'(p) = \frac{400}{p} - \frac{600}{1-p} = 400(1-p) - 600p$$

$$= 400 - 400p - 600p \quad \text{extrém}$$

$$= 400 - 1000p = 0$$

$$1000p = 400$$

$$\underline{\underline{p = 0{,}4}}$$

(b) nezávisí na stravování

	V	C	A	T	Σ
reálná data	170	380	180	270	1000
teorie	250	250	250	250	1000
Σ	420	630	430	520	2000

X... oblíbenost snídaně v zařízení

H_0 ... X má rovnoměrné s prav. dů pravděpodobností $p=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

H_A ... nemá rovnoměrné

$$\chi^2=\frac{(170-250)^2}{250}+\frac{(380-250)^2}{250}+\frac{(110-250)^2}{250}+\frac{(270-250)^2}{250}$$

kontingenční tabulka 3. sem. test

	J	N	T	H	Σ
D	10	50	10	10	80
C	30	30	30	30	120
Σ	40	80	40	40	200

H_0: typ produktu je závislý na domácím/cizinci

H_A: není závislý

pomocná tabulka:

	J	N	T	H	Σ
D	$\frac{80\cdot40}{200}=\frac{3200}{200}=16$	$\frac{80\cdot80}{200}=\frac{6400}{200}=32$	$\frac{80\cdot40}{200}=16$	16	80
C	$\frac{120\cdot40}{200}=\frac{4800}{200}=24$	$\frac{120\cdot80}{200}=\frac{9600}{200}=48$	24	24	120
	40	80	40	40	200

Potom $\chi^2=\frac{(10-16)^2}{16}\cdot 3+\frac{(50-32)^2}{32}+\frac{(40-24)^2}{24}\cdot 3+$

$+\frac{(80-48)^2}{48}=\frac{36}{16}\cdot 3+\frac{18^2}{32}+\frac{16^2}{24}\cdot 3+\frac{32^2}{48}=$

$=\frac{27}{4}+\frac{3^4}{8}+2^5+\frac{2^6}{3}=\frac{6\cdot 27+3^5+3\cdot 2^8+2^9}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=$

$=2.$

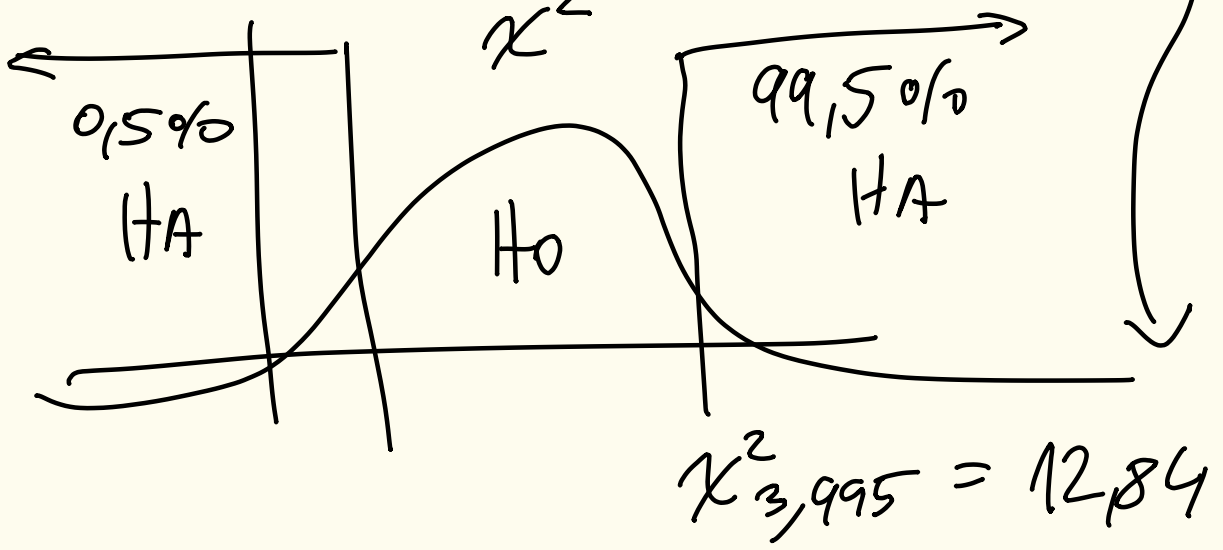
$$\chi^2=\frac{(170-250)^2}{250}+\frac{(380-250)^2}{250}+\frac{(110-250)^2}{250}+\frac{(270-250)^2}{250}$$

$$\chi^2 = \frac{80^2}{250} + \frac{130^2}{250} + \frac{70^2}{250} + \frac{20^2}{250} =$$

$$= \frac{6400}{250} + \frac{16900}{250} + \frac{4900}{250} + \frac{400}{250} =$$

$$= \frac{2860}{25} \simeq 114$$

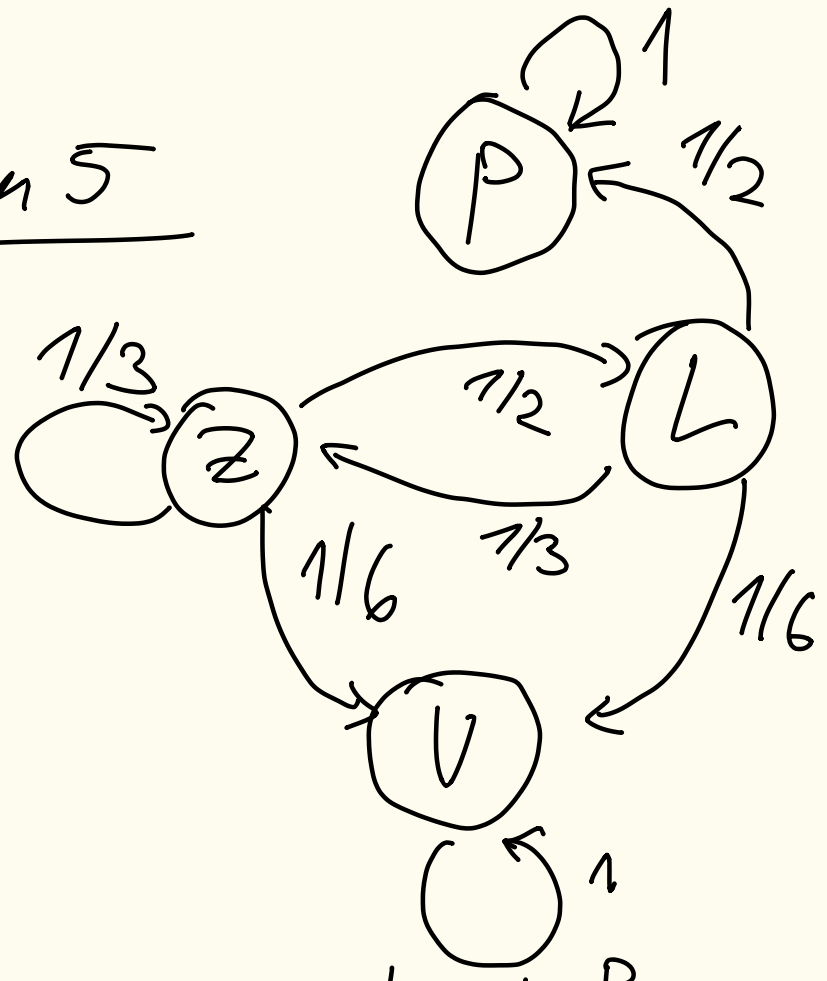
2500 = 100 x
2750 = 110 x
2850 = 114 x



$\chi^2_{3,995} = 12,84$

Hypotézu H0 zamítáme ve prospěch HA.

Úloha 5



P... pohlaví A
V... výhra A
L... padlo jednociferné číslo
Z... zadních hry (nepadlo ani jednociferné číslo)

$$P = \begin{array}{c} \\ Z \\ L \\ V \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Z & L & V & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\pi_1 = 1/3\pi_1 + 1/3\pi_2 + \pi_3 \Rightarrow \pi_3 = 0$
$\pi_2 = 1/2\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = 0$
$\pi_3 = 1/6\pi_1 + 1/6\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = 0$
$\pi_4 = 1/2\pi_2 + \pi_4$
$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \Rightarrow \pi_3 = 0$
$0 + 0 + 0 + \pi_4 = 1 \quad \pi_4 = 1$

$\pi = (0, 0, 0, 1)$