B0B01PST Pravděpodobnost a statistika - zkouškový test 24.5.2022 (přednášející HELISOVÁ, cvičící BECK / KORBELÁŘ)

Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 52 bodů)
Náplní práce sekretářky jisté firmy je vyřizování telefonátů a emailů, vyzvedávání pošty a další administrativní činnost (kterou se zde nebudeme zabývat). Sekretářka má pracovní dobu od 8:00 do 16:30, přičemž v době 11:30-12:00 je na obědě. V době, kdy sedí v kanceláři, vyřídí průměrně dva telefonáty a tři emaily za hodinu. Všechny záležitosti vyřizuje rovnoměrně po celý den a nezávisle na sobě. Průměrně každý čtvrtý telefonát je objednávka zakázky, v emailové komunikaci pak tvoří objednávky zakázek 2/3 všech emailů. Pošta přichází denně mezi 10:00 a 12:30. Pokud pošťák sekretářku nezastihne, nechá poštu na vrátnici. Spočtěte pravděpodobnost, že

a) příští vyřizovaná záležitost bude objednávka, (5 bodů)

b) příští vyřizovaná objednávka bude telefonická, (5 bodů)

c) nejpozději čtvrtá vyřizovaná objednávka bude telefonická, (7 bodů)

d) do oběda vyřídí sekretářka nejvýše tři záležitosti, (7 bodů)

e) do oběda vyřídí sekretářka nejvýše tři telefonáty, (7 bodů)

f) do oběda vyřídí sekretářka nejvýše tři telefonáty a přitom všechny tyto telefonáty se uskuteční až po 10:00, (7 bodů)

g) během týdne, tj. 5 pracovních dnů, musí sekretářka alespoň dvakrát pro poštu na vrátnici, (7 bodů)

h) během tří měsíců, které mají v součtu 64 pracovních dnů, musí sekretářka pro poštu na vrátnici alespoň dvanáctkrát. (Řešte pomocí CLV; 7 bodů)

Úloha 2. (celkem 12 bodů)
Statistiky uvádějí, že střední hodnota výšky sedmiletého dítěte je 125 cm. V první třídě jisté základní školy byla měřena výška dětí a vzorek naměřených hodnot (v cm) je uveden v následující tabulce:

120	128	124	128	131	132	126	125	129	128	123	126	134	122	129

Statisticky otestujte na hladině 5%, zda uvedený vzorek odpovídá uváděným statistikám, proti

a) alternativě, že střední výška sedmiletého dítěte není 125 cm,

Úloha 1 $P(T)=2/5$ $P(E)=3/5$

$P(O|T)=1/4$ $P(O|E)=2/3$

(a) $P(O)=P(O|T)P(T)+P(O|E)P(E)$

$=1/4\cdot 2/5+2/3\cdot 3/5=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

(b) $P(T|O)=\frac{P(O|T)P(T)}{P(O)}=\frac{1/4\cdot 2/5}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2}{20}}{\frac{1}{2}}=$

$=4/20=1/5$

(c) X... počet objednávek předpovědí telefonicky

$X\sim Be(p)$ $p=1/5$ $P(X=k)=p(1-p)^k$

$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)\ldots+P(X=3)=$

$\sum_{k=0}^{3} p(1-p)^k = 1-(1-p)^4=1-\left(\frac{4}{5}\right)^4\approx 0{,}5904$

(d) Y... počet uživatelských zařízení do oběda

$Y\sim Po(\lambda)$ průměrně 5 zařízení za hodinu

3,5 hodiny do oběda, průměrně tedy

$5\cdot 3{,}5=17{,}5$ zařízení do oběda

$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=e^{-17{,}5}\left(1+17{,}5+\frac{17{,}5^2}{2}+\frac{17{,}5^3}{6}\right)$

(e) Z ... počet telefonátů do oběda

2 telefonáty za hodinu

7 tel. za 3,5 hodiny

$Z \sim Po(\lambda)$ $\lambda = 7$

$$P(Z \leq 3) = P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) + P(Z=3) =$$

$$= e^{-7}\left(1 + 7 + \frac{7^2}{2} + \frac{7^3}{6}\right) \approx 0{,}081$$

(f) A ... počet telefonátů mezi 10:00 a 11:30

2 tel / h

3 tel / 1,5 h

$A \sim Po(\lambda_1)$

$$P(A \leq 3) = e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6}\right) \approx$$

B ... počet telefonátů mezi 8:00 a 10:00

4 tel / h

$B \sim Po(\lambda_2)$

$$P(B=0) = e^{-4}$$

C ... počet telefonátů do oběda s tím, že všechny jsou po 10:00

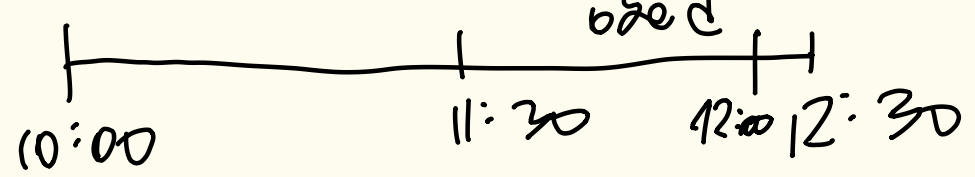
z konvoluce dvou Poissonových rozdělení

$C \sim Po(\lambda_{1,2})$ $Po(\lambda_{1,2}) = Po(\lambda_1 + \lambda_2) = Po(7)$

$P(C \leq 3) = \ldots e^{-7}(1 + 7 + 7^2$

nebo jenom $P(A \leq 3) \cdot P(B=0)$?

(g)



pravděpodobnost, že pošta přijde, když je schránka na oběd

$$\frac{0,15}{2,5} = 0,2$$

X ... počet cest na vrtulníci za 5 dní

$X \sim Po(\lambda)$ průměrně 0,2 cesty na vrtulníci / den

průměrně 1 cesta / 5 dní

$$1 - P(X<2) = P(X=0) \dots$$

$$1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$1 - \frac{1}{2e}$$

(h) X_i ... schránka musí v den na vrtulníci

$P(X_i=0) = 0,8$ $X_i = Alt(p)$ $p=0,2$ $EX = 0,2$

64 dní $varX = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{4}{25}$

$P(X_i=1) = 0,2$

$$P\left(\sum_{i=1}^{64} X_i \geq 12\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{64} X_i - 64 \cdot 0,2}{\sqrt{64 \cdot \frac{4}{25}}} \geq \frac{12 - 64 \cdot 0,2}{\sqrt{64 \cdot \frac{4}{25}}}\right) =$$

$$= P(X \geq$$

Z $\frac{16}{5}$ $\frac{8}{10}$

Úloha 2

Střední hodnota je 125

$$\overline{x_{15}} = \frac{1905}{15} = 127$$

$15 \times 100 = 1500$

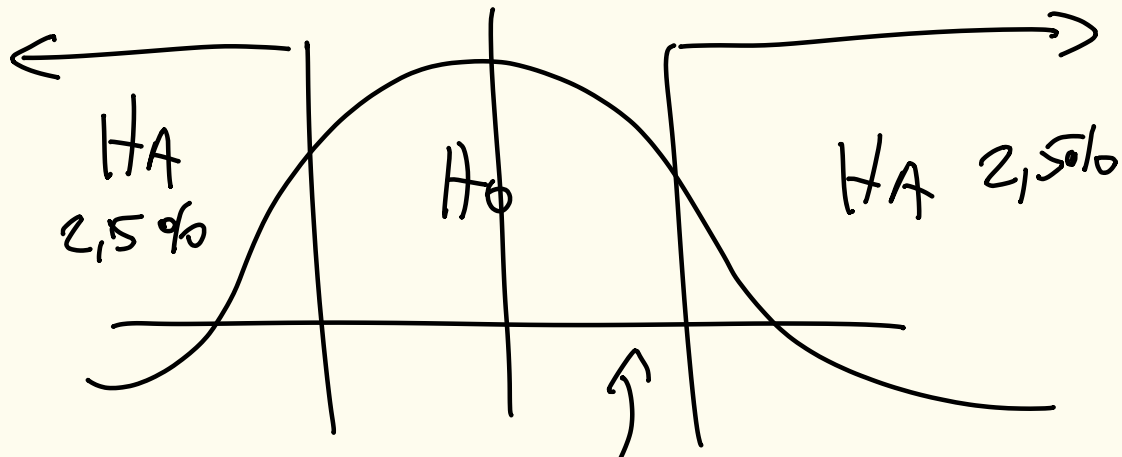
$15 \times 125 = 1875$

126	1890
127	1905

$$s_{15}^2 = \frac{206}{14} \approx 14,5$$

$14 \times 15 = 140 + 70 = 210$

$$\sqrt{s_{15}^2} = \sqrt{14,5} \approx 3,7$$



interval:

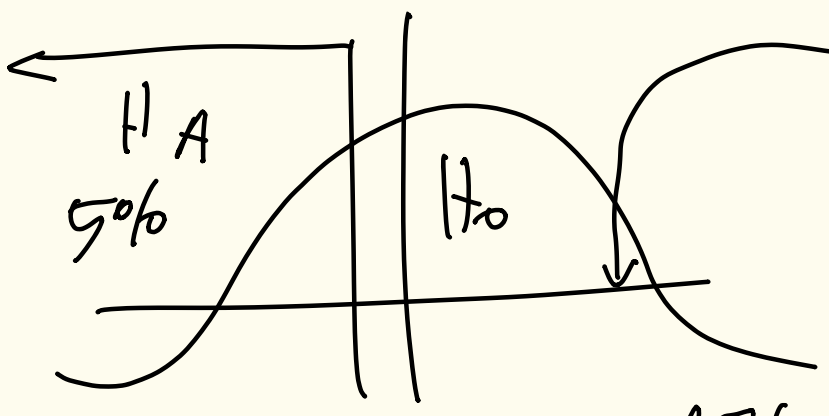
$$T_0 = \frac{127 - 125}{3,7} \sqrt{15} =$$

$$= \frac{2}{3,7} \sqrt{15} \approx \frac{2}{3,7} \cdot 4 =$$

≈ 2

Hypotézu H_0 nezamítáme ve prospěch H_A

(h) H_A: Střední výška je menší než 125 cm



$t_{14,0,05} = 1,76 < T_0$ H_0 nezamítáme ve prospěch H_A

b) vhodně zvolené jednostranné alternativě.

(Hint: $\sum x_i = 1905$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 206$; 12 bodů)

Úloha 3. (celkem 15 bodů)
Výsledky fotbalového týmu v různých barvách dresů jsou dány následující tabulkou:

	výhra	prohra	remíza
bílé	20	20	10
modré	20	15	15

a) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je výsledek zápasu závislý na volbě barvy dresu. (8 bodů)

b) Statisticky otestujte na hladině 1%, zda pravděpodobnosti výhry, prohry a remízy jsou přibližně stejné. (7 bodů)

Úloha 4. (celkem 21 bodů)
Ehrenfestovo schéma: Máme N kuliček rozmístěných do dvou nádob A a B. V každém kroku vybereme náhodně rovnoměrně jednu kuličku a přemístíme ji do druhé nádoby. Nechť $N = 4$ a X_n je počet kuliček v nádobě A v n-tém kroku. Pro Markovský řetězec $\{X_n, n = 0, 1, 2, ...\}$

a) sestavte matici pravděpodobností přechodu, (7 bodů)

b) najděte stacionární rozdělení, (7 bodů)

c) určete pravděpodobnosti nabývaných hodnot na startu, tj. $P(X_0 = k)$ pro všechna $k = 0, \ldots, 4$, jestliže po třech krocích je nádoba A prázdná, tj. pozorujeme $X_3 = 0$. (7 bodů)

mocnina P 4 ale jak?

Úloha 3

	V	P	R	Σ
B	20	20	10	50
M	20	15	15	50
Σ	40	35	25	100

$$\chi^2_{data} = 0 + 0 + \frac{2{,}5^2}{17{,}5} + \frac{2{,}5^2}{12{,}5} + \frac{2{,}5^2}{17{,}5} + \frac{2{,}5^2}{12{,}5} =$$

$$\frac{5}{7} + 1 \overset{cca}{\approx} 1{,}7$$

stupně volnosti: $1 \cdot 2 = 2$

	$\frac{50 \cdot 40}{100} = 20$	$\frac{50 \cdot 35}{100} = 17{,}5$	$\frac{50 \cdot 25}{100} = 12{,}5$	50
	$\frac{50 \cdot 40}{100} = 20$	17,5	12,5	50
	40	35	25	100

$$\chi^2_{2;0,95} = 5{,}99$$

$$\chi^2_{data} < \chi^2_{2;0,95}$$

Proto H_0 nezamítáme ve prospěch H_A

V	P	R	Σ
realita 40	35	25	100
teorie $\frac{100}{3}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{100}{3}$	100

H_0: rozložení výhry, prohry, remíza je $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

H_A: není

$$\chi^2_{data} = \frac{\left(40 - \frac{100}{3}\right)^2}{\frac{100}{3}} + \frac{\left(35 - \frac{100}{3}\right)^2}{\frac{100}{3}} + \frac{\left(25 - \frac{100}{3}\right)^2}{\frac{100}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{20^2}{3^2}}{\frac{100}{3}} + \frac{\frac{15^2}{3^2}}{\frac{100}{3}} + \frac{\frac{25^2}{3^2}}{\frac{100}{3}} = \frac{\begin{matrix}15\\15\\25\\50\\15\\225\end{matrix}}{}$$

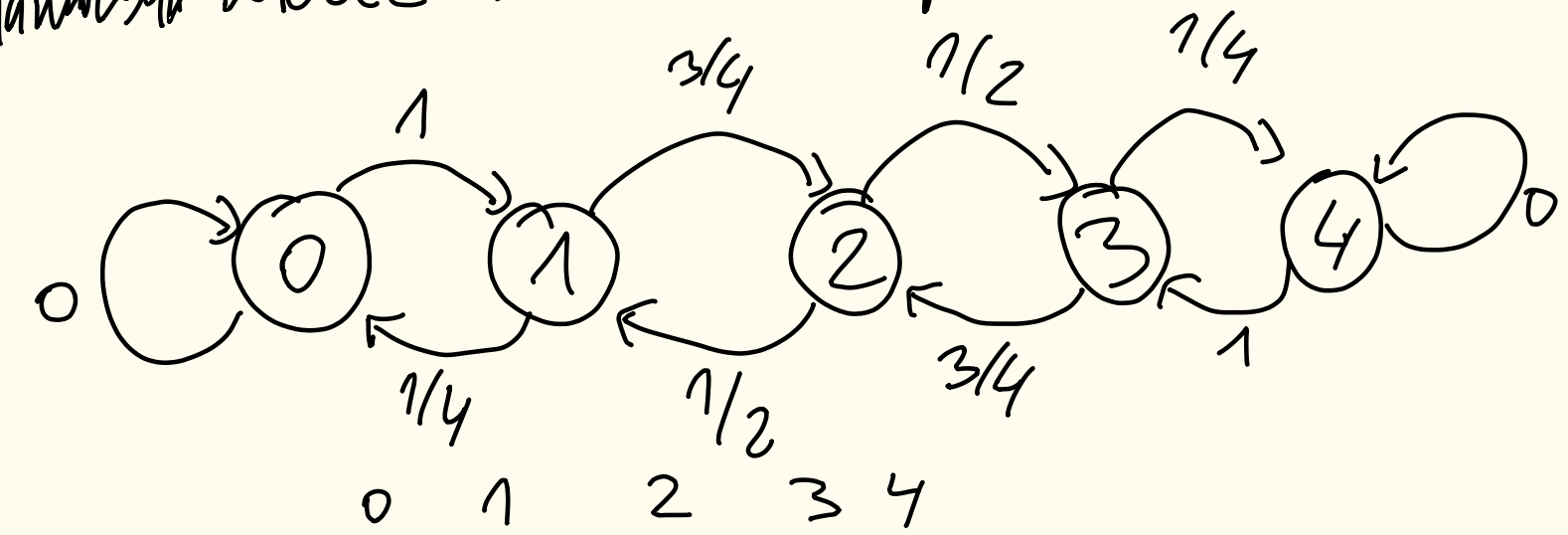
$$= \frac{20^2}{100 \cdot 3} \times \frac{5^2}{100 \cdot 3} + \frac{25^2}{100 \cdot 3} = \frac{4}{3} + \frac{1}{12} + \frac{25}{12} = \frac{42}{12} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} =$$

35

$\chi^2_{2,0,99} = 9{,}21 \qquad \chi^2_{data} < 9{,}21 \quad H_0$ nezamítáme

Úloha 4

Markovský řetězec se stavovým prostorem $\{0,1,2,3,4\}$



$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= 1/4\,\pi_1 \\ \pi_1 &= \pi_0 + 1/2\,\pi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3}{4}\pi_1 = 1/2\,\pi_2 \Rightarrow \pi_1 = \frac{2}{3}\pi_2$$
$$\pi_0 = \frac{1}{6}\pi_2$$

$$\pi_2 = 3/4\,\pi_1 + 3/4\,\pi_3$$

$$\left.\begin{aligned} \pi_3 &= 1/2\,\pi_2 + \pi_4 \\ \pi_4 &= 1/4\,\pi_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3}{4}\pi_3 = 1/2\,\pi_2 \Rightarrow \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2$$
$$\pi_4 = \frac{1}{6}\pi_2$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \Rightarrow \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_2 + \pi_2 + \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{16}{6}\pi_2 = 1$$

$$\pi_2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\underline{\pi = \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)}$$

$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{16} \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$