B0B01PST Pravděpodobnost a statistika - zkouškový test 1.6.2022 (přednášející HELISOVÁ, cvičící BECK / KORBELÁŘ)

Jméno a příjmení	1	2	3	4	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 38 bodů)
Firma rozdává svým zaměstnancům coby jednu z forem odměn slevové vouchery na nákup v libovolném obchodě jistého obchodního centra, které má dva sektory, označme je A a B. Vouchery mají hodnotu 100 Kč, 200 Kč a 500 Kč a v těchto hodnotách jsou vydávány v poměru 3:2:1. Bylo vypozorováno, že zaměstnanci uplatní dvakrát více voucherů v sektoru A než v sektoru B. Mezi vouchery uplatněnými v sektoru A má 20% hodnotu 500 Kč a 40% hodnotu 200 Kč. Zákazníci průměrně uplatní v obchodním centru dva vouchery za den. Uplatňování voucherů je rovnoměrné a nezávisí vzájemně na sobě ani na hodnotách voucherů. Spočtěte pravděpodobnost, že

a) příští voucher uplatněný v sektoru B bude v hodnotě 500 Kč, (5 bodů)

b) příští voucher v hodnotě 500 Kč bude uplatněný v sektoru B, (5 bodů)

c) na příští uplatnění voucheru bude obchodní centrum čekat alespoň tři dny, (7 bodů)

d) během tří dnů budou v obchodním centru uplatněny alespoň dva vouchery v hodnotě 500 Kč, (7 bodů)

e) nejpozději čtvrtý voucher bude uplatněný v sektoru B, (7 bodů)

f) ze 72 voucherů jich bude alespoň 30 uplatněných v sektoru B. (Řešte pomocí CLV; 7 bodů)

Úloha 2. (celkem 25 bodů)
Sdružené pravděpodobnosti dvou diskrétních náhodných veličin X a Y jsou dány následující tabulkou:

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	1/12	1/4	1/12
$Y=0$	1/12	0	1/12
$Y=1$	1/12	1/4	1/12

a) Spočtěte kovarianci $\mathrm{cov}(X,Y)$ a korelaci $\mathrm{corr}(X,Y)$. (8 bodů)

b) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé, a stručně matematicky zdůvodněte. (5 bodů)

c) Pokud jste v bodě b) rozhodli, že X a Y **jsou nezávislé**, určete (libovolné) sdružené rozdělení náhodného vektoru (U,V), v němž náhodné veličiny U a V mají stejná marginální rozdělení jako X, resp. Y, ale přitom U a V **nejsou nezávislé**.
Pokud jste v bodě b) rozhodli, že X a Y **nejsou nezávislé**, určete sdružené rozdělení náhodného vektoru (U,V), v němž náhodné veličiny U a V mají stejná marginální rozdělení jako X, resp. Y, ale přitom U a V **jsou nezávislé**. (7 bodů)

d) Definujte **obecně** nezávislost dvou náhodných veličin Z a W. (5 bodů)

$P(V_{100}) = 1/2 \quad P(V_{200}) = 1/3 \quad P(V_{500}) = 1/6$

$P(V_{500}|A) = 0{,}2 \quad P(V_{200}|A) = 0{,}4 \quad P(V_{100}|A) = 0{,}4$

(a)

	100	200	500	Σ
A	160	160	80	400
B	140	40	20	200
Σ	300	200	100	600

$$P(V_{500}|B) = \frac{20}{200} = 0{,}1$$

(b) $$P(B|V_{500}) = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

(c) prùměrně dva vouchery za den

X... počet voucherů za 3 dny

$X \sim Po(\lambda)$ 6 voucherů / 3 dny

$$P(X=0) = \frac{\lambda^4}{k!} e^{-\lambda} = \underline{\underline{e^{-6}}}$$

lze i přes exponenciální

(d) Y... počet voucherů v hodnotě 500 Kč / 3 dny

$Y \sim Po(\lambda)$ 6 voucherů / 3 dny

1/6 voucherů hodnota 500

1 voucher 500 Kč / 3 dny

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - e^{-1}(2) = \underline{\underline{1 - \frac{2}{e}}}$$

(e) Z ... počet vouchrů před prvním v B

$$P(B) = 1/3$$

$$Z \sim Ge(p)$$

$$P(Z \leq 3) = 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot (2/3)^2 + 1/3 \cdot (2/3)^3 =$$

$$= 1/3 + 2/9 + 4/27 + 8/81 = \frac{27+18+12+8}{81} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{65}{81}}}$$

(f) X_i ... i-tý voucher skl uplatněn v sektoru B

$$P(X_i = 0) = 2/3 \qquad EX = 1/3$$

$$P(X_i = 1) = 1/3 \qquad varX = 1/3(2/3) = 2/9$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{72} X_i \geq 30\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{72} X_i - 72 \cdot 1/3}{\underbrace{\sqrt{72 \cdot 2/9}}_{=4}} \geq \frac{30 - 72 \cdot 1/3}{\sqrt{72 \cdot 2/9}}\right)$$

$$\frac{30-24}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$= P(X \geq \tfrac{3}{2}) = 1 - P(X < \tfrac{3}{2}) = 1 - \Phi(\tfrac{3}{2})$$

Úloha 2

(a) $cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

$\mathbb{E}XY = -1 \cdot -1 \cdot 1/12 + -1 \cdot 1/12 = 0$

$\mathbb{E}X = \frac{1}{4} \cdot -1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 0$

$\mathbb{E}Y = -5/12 + 5/12 = 0$

$cov(X,Y) = 0 - 0 = 0$

$corr = \frac{cov(X,Y) \longrightarrow 0}{\sqrt{var X}\sqrt{var Y}} = 0$

(b) Veličiny jsou nezávislé pokud by pro každé i,j $P(X_i = x_i, X_j, x_j) = P(X_i = x_i) \cdot P(X_j = x_j)$

Potom například pro $P(X=0, Y=0) = 0 \neq 1/6 \cdot 1/2 = P(X=0)P(Y=0)$ neplatí

veličiny jsou závislé

(c) (U,V) je libovolný náhodný vektor, který má stejné marginální rozdělení jako vektor (X,Y), platí tedy

$P(U=i) = P(X=i) \quad P(V=j) = P(Y=j) \quad \forall i,j.$

Abychom veličiny nezávislé, musí platit

$P(U=i, V=j) = P(U=i) \cdot P(V=j) = P(X=i)P(Y=j)$

Potom tabulka

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$	$\sum$
$Y=-1$	5/48	5/24	5/48	5/12
$X=0$	1/24	1/12	1/24	1/6
$X=1$	5/48	5/24	5/48	5/12
$\sum$	1/4	1/2	1/4	1

Náhodné veličiny jsou nezávislé právě tehdy, když platí, že

$\forall i,j$ platí $P(Z=i, W=j) = P(Z=i)\,P(W=j)$

Úloha 3. (celkem 15 bodů)
Botanici měřili na 15 exemplářích výšku jistého druhu rostliny. Naměřené hodnoty (zaokrouhleno na celé cm) jsou uvedeny v následující tabulce:

83	95	90	98	104	106	97	86	97	101	90	97	110	89	92

a) Načrtněte histogram a určete z něj, z jakého rozdělení data mohou pocházet. (5 bodů)

b) Statisticky otestujte, zda můžeme říct, že střední výška rostliny je 1m, přičemž testujte

(i) na hladině 5%,

(ii) na hladině 1%.

(Hint: $\sum x_i = 1435$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 797,33$; 10 bodů).

Úloha 4. (celkem 22 bodů)
Ehrenfestovo schéma s absorpčními stavy: Máme N kuliček rozmístěných do dvou nádob A a B. V každém kroku vybereme náhodně rovnoměrně jednu kuličku a přemístíme ji do druhé nádoby. Pokud je jedna z nádob prázdná, proces končí. Nechť $N = 4$ a X_n je počet kuliček v nádobě A v n-tém kroku. Pro Markovský řetězec $\{X_n, n = 0, 1, 2, ...\}$

a) Sestavte matici pravděpodobností přechodu. (7 bodů)

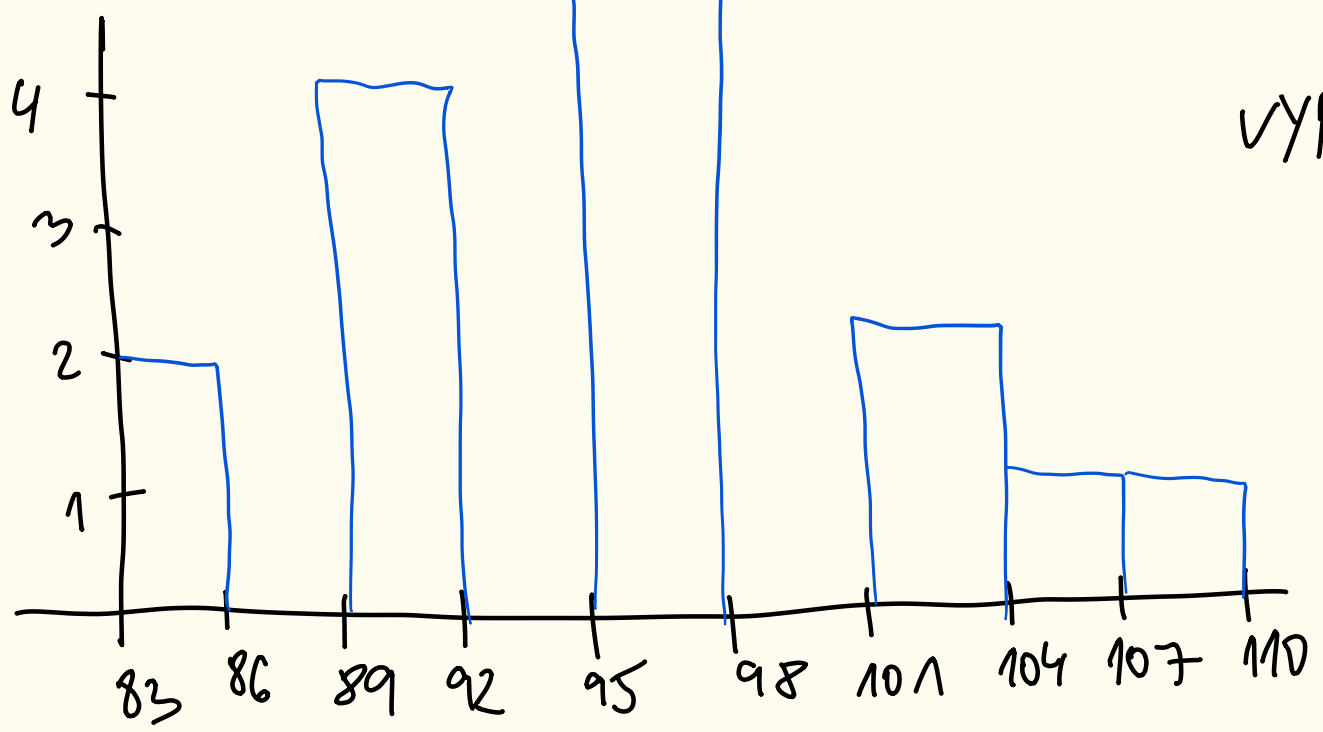
b) Určete pravděpodobnost, že skončíme s prázdnou nádobou A, jestliže v ní na začátku byly 3 kuličky, tj. $X_0 = 3$. (15 bodů)

Úloha 3

seřazená data

83 86 89 90 90 92 95 97 97 97 98 101 104 106 110

rozdíl 110 - 83 = 27 intervaly po 3



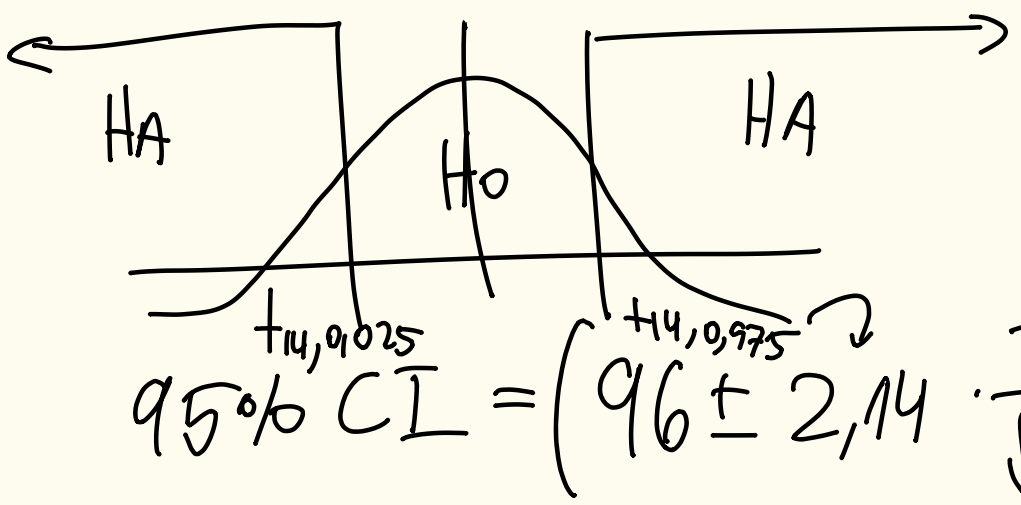
vypadá jako normální rozdělení

$$\overline{X} = \frac{1435}{15} \approx 96$$

$$S_x^2 = \frac{79733}{14} \approx 57 \quad S_x = \sqrt{57} \approx 7{,}5$$

55
14
20
20
55
770

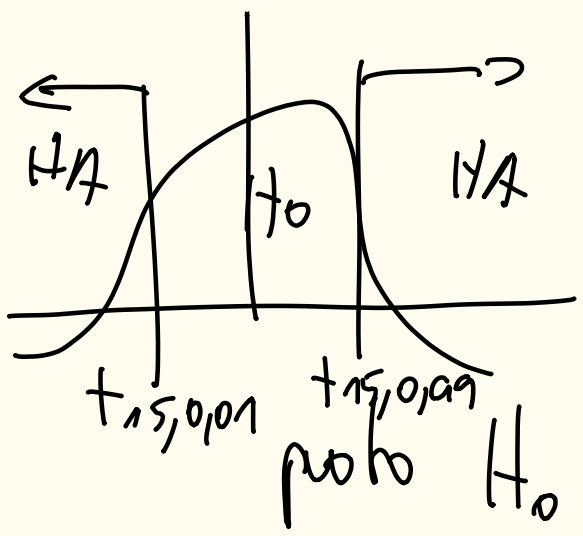
H_0: střední výška cosplayerky je 100 cm



$$95\%\ CI = \left(96 \pm 2{,}14 \cdot \frac{7{,}5}{\sqrt{15}}\right) \overset{\approx 2}{\approx} \left(96 \pm 2{,}14 \cdot 2\right) = \left(96 \pm 4{,}28\right) =$$

$$= (91{,}72;\ 100{,}28)$$

100 leží uvnitř intervalu



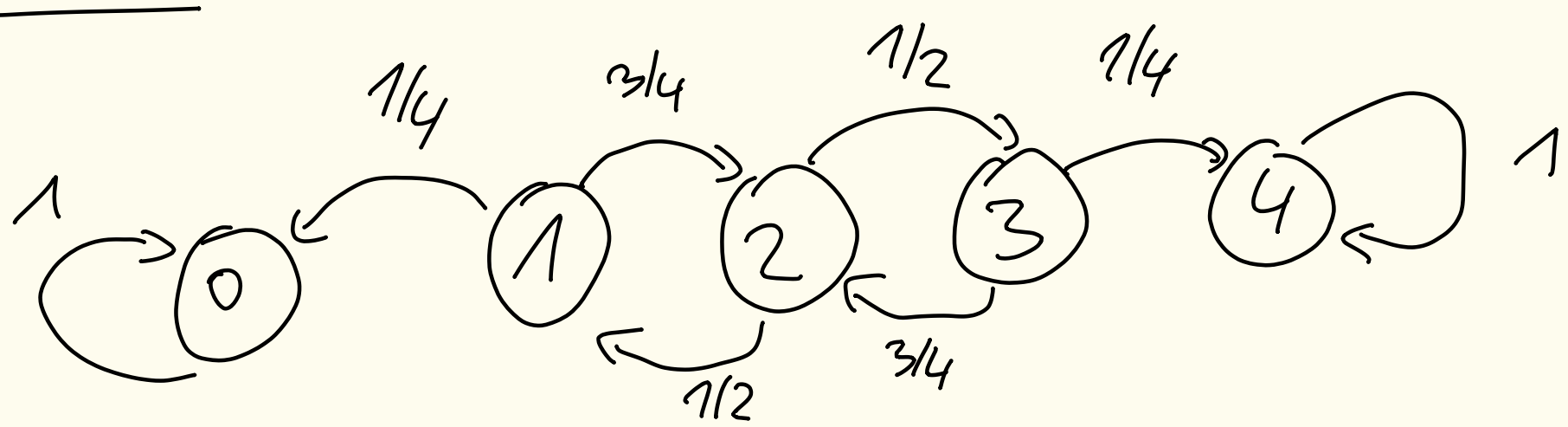
pro H_0 nezamítáme ve prospěch HA

$$1\%\ CI = \left(96 \pm 2{,}62 \cdot \frac{7{,}5}{\sqrt{15}}\right) \overset{\approx 2}{=} \left(a \ldots, 105, \ldots\right)$$

3,8

Nezamítáme

Úloha 4



$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left.\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/4 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

R Q

hledáme $p_{3E}^{(\infty)}$

$$P^{\infty} = \left(\begin{array}{c|c} \Pi & 0\,0\,0 \\ \hline M & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array}\right)$$

$$M = R + QR + Q^2R + Q^3R + \ldots =$$

$$= \underbrace{\left(\Pi_3 + Q + Q^2 + \ldots\right)}_{F} R$$

F → fundamentální matice

jednotková matice stejné dimenze jako Q

(analogie $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$)

$$F = \left(\Pi_3 - Q\right)^{-1}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -3/4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5/4 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5/4 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 10/4 & 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 10/4 & 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 3 & 5/2 \end{array}\right)$$

$$M = \begin{pmatrix} 5/2 & 3 & 3/2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3/2 & 3 & 5/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 1/2 & 1/2 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3/8 & 5/8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ptali jsme se na $p_{30}^{(\infty)} = 3/8$