B0B01PST Pravděpodobnost a statistika - zkouškový test 6.6.2022 (přednášející HELISOVÁ, cvičící BECK / KORBELÁŘ)

Jméno a příjmení	1	2	3	4	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 38 bodů)
Na akci pořádané jistou zoologickou zahradou u příležitosti Dne dětí dostávají děti odměnu za splnění úkolu formou žetonu do automatu. Po vhození žetonu jim vždy vypadne lízátko, bonbón nebo žvýkačka, přičemž tyto sladkosti jsou v automatu v poměru 1:2:1. Každá sladkost je v obalu buď se slonem nebo s žirafou nebo s tučňákem, přičemž tučňáků je na obalech 50% a žiraf 20%. Obaly na lízátka tvoří ze 40% tučňáci a z 20% žirafy, obaly na bonbóny tvoří ze 40% tučňáci a z 25% žirafy. K automatu si přichází vybrat odměnu průměrně jedno dítě za dvě minuty. Děti přicházejí k automatu nezávisle na sobě. Do automatu jsou stále doplňovány sladkosti tak, aby byl zachován poměr mezi druhy sladkostí uvedený výše. Spočtěte pravděpodobnost, že

a) příští žvýkačka bude v obalu s tučňákem, (5 bodů)

b) příští sladkost v obalu s tučňákem bude žvýkačka, (5 bodů)

c) během deseti minut budou vydány alespoň tři odměny v obalu s tučňákem, (7 bodů)

d) mezi čtyřmi vydanými odměnami bude nejvýše jedno lízátko, (7 bodů)

e) příští vydání odměny z automatu přijde nejpozději za 5 minut, (7 bodů)

f) je-li nyní v automatu 100 sladkostí a doplňování automatu se zaseklo, vydrží i tak automat vydávat odměny ještě alespoň tři hodiny. (Řešte pomocí CLV; 7 bodů)

Úloha 2. (celkem 25 bodů) Sdružené pravděpodobnosti dvou diskrétních náhodných veličin X a Y jsou dány následující tabulkou:

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=0$	1/6	0	1/6	0
$Y=1$	1/3	1/8	1/12	1/8

a) Spočtěte kovarianci $\mathrm{cov}(X,Y)$ a korelaci $\mathrm{corr}(X,Y)$. (8 bodů)

b) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé, a stručně matematicky zdůvodněte. (5 bodů)

c) Pokud jste v bodě b) rozhodli, že X a Y **jsou nezávislé**, určete (libovolné) sdružené rozdělení náhodného vektoru (Z,U), v němž náhodné veličiny Z a U mají stejná marginální rozdělení jako X, resp. Y, ale přitom Z a U **nejsou nezávislé**.
Pokud jste v bodě b) rozhodli, že X a Y **nejsou nezávislé**, určete (libovolné) sdružené rozdělení náhodného vektoru (Z,U), v němž náhodné veličiny Z a U mají stejná marginální rozdělení jako X, resp. Y, ale přitom Z a U **jsou nezávislé**.. (7 bodů)

d) Definujte **obecně** nezávislost dvou náhodných veličin V a W. (5 bodů)

Úloha 1

$P(L) = 1/4 \quad P(B) = 1/2 \quad P(G) = 1/4$

$P(T) = 1/2 \quad P(\check{Z}) = 1/5$

$P(T|L) = 2/5 \quad P(\check{Z}|L) = 1/5 \quad P(S|L) = 2/5$

$P(T|B) = 2/5 \quad P(\check{Z}|B) = 1/4 \quad P(S|B) = 11/20$

	L	B	G	Σ
T	20	40	40	100
Ž	10	25	5	40
S	20	35	5	60
Σ	50	100	50	200

(a) $P(T|G) = 40/50 = \underline{\underline{4/5}}$

(b) $P(G|T) = 40/100 = 4/10 = \underline{\underline{2/5}}$

(c) X... počet vadných skříněk v obalu s tužkami za 10 min

$X \sim Po(\lambda)$ 1 odměna / 2 minuty

5 odměn / 10 minut

2,5 tužky / 10 minut $\quad \frac{8}{8} + \frac{20}{8} + \frac{25}{8} = \frac{53}{8}$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - e^{-2,5}\left(1 + \frac{5}{2} + \frac{\frac{25}{4}}{2}\right) =$$

$$1 - \frac{53}{8}e^{-2,5} \approx 0,456$$

(d) Y ... počet vydaných lízátek

$Y \sim Binom(n, p)$ $\quad n = 4$, $\quad p = 1/4$

$\binom{27}{4}$ $\quad \binom{28}{8}$

$$P(Y \leq 1) = 3/4^4 + 4 \cdot 1/4\, 3/4^3 =$$

$$= \frac{3^4}{4^4} + \frac{3^3}{4^3} = \frac{3^4 + 3^3 \cdot 4}{4^4} = \frac{81 + 108}{256} = \frac{189}{256} =$$

$$\underline{\underline{0{,}738}}$$

(e) Z ... počet vydaných odměn za 5 minut

$Z \sim Po(\lambda)$ $\quad$ 1 odměna / 2 min $\quad$ za 5 minut $\emptyset$ odměn

0,5 / min

$$P(Z = 0) = \underline{\underline{e^{-2{,}5}}} \quad 2{,}5 \,/\, 5\,\text{min}$$

(f) X_i ... doba čekání na vydání i-té sladkosti

$X_i \sim Exp(\lambda)$ $\quad \mathbb{E}X = 2$, $\quad \lambda = 1/2$ $\quad var\, X = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 180\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot 2}{\sqrt{4 \cdot 100}} \leq \frac{180 - 100 \cdot 2}{\sqrt{4 \cdot 100}}\right)$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{Z}$ $\quad \frac{-20}{20} = -1$

$$1 - \Phi(-1) = \underline{\underline{\Phi(1)}} \quad \text{z tabulek ...}$$

Úloha 2 $\quad cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$

$\mathbb{E}XY = 1/8 + 2\cdot 1/12 + 3\cdot 1/8 = 1/2 + 1/6 = 4/6 = \underline{\underline{2/3}}$

$\mathbb{E}X = 1/8 + 2\cdot 1/6 + 2\cdot 1/12 + 3\cdot 1/8 = 1/2 + 1/3 + 1/6 = 6/6 = 1$

$\mathbb{E}Y = 1/3 + 1/8 + 1/12 + 1/8 = 1/3 + 1/4 + 1/12 = \frac{4+3+1}{12} = \frac{8}{12} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

$cov(X,Y) = 2/3 - 2/3 = \underline{\underline{0}}$

$\Rightarrow corr(X,Y) = \underline{\underline{0}}$

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	Σ
$Y=0$	1/6	0	1/6	0	1/3
$Y=1$	1/3	1/8	1/12	1/8	2/3
Σ	1/2	1/8	1/4	1/8	

$\frac{3+3+2+8}{24} = \frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(b) nejsou nezávislé, protože například naplatí

$P(X=1, Y=0) = 0 \neq P(X=1)P(Y=0) = 1/8 \cdot 1/3$

neboť $P(X=3, Y=0) = 0 \neq P(X=3)P(Y=0) = 1/8 \cdot 1/3$

(c) Zvolím (Z,U) se stejným marginálním rozdělením, ve kterém budou Z a U nezávislé

	$Z=0$	$Z=1$	$Z=2$	$Z=3$	Σ
$U=0$	1/6	1/24	1/12	1/24	1/3
$U=1$	1/3	1/12	1/6	1/12	2/3
Σ	1/2	1/8	1/4	1/8	1

Jsou Z a U jsou nezávislé pro $\forall i,j$

(d) definice ...

Úloha 3. (celkem 23 bodů)
Jistá pojišťovna poskytuje mj. pojištění nemovitosti. V uplynulém roce jí bylo nahlášeno 50 škod na rodinných domech, 33 na bytech a 17 na chatách. Výše škod v uplynulém měsíci pak byly (v tis. EUR): 2, 2.5, 1, 10, 5. Pojišťovna používá k modelování výše škod náhodnou veličinu s hustotou

$$f(x) = \beta^2 x e^{-\beta x} \quad \text{pro } x > 0 \text{ (jinak } f(x) = 0).$$

a) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda můžeme považovat pravděpodobnosti, že nastane škoda na rodinném domě, bytu, resp. chatě, za rozdělené v poměru 2:2:1. (7 bodů)

b) Z dat za uplynulý měsíc odhadněte parametr β

(i) metodou maximální věrohodnosti, (7 bodů)

(ii) metodou momentů. (9 bodů)

Úloha 4. (celkem 14 bodů)
V počítačové hře musí hráč postupně splnit tři úkoly (řešení jednoho úkolu = jedno kolo hry). Pokud nesplní první úkol, hra končí prohrou, pokud splní třetí úkol, hra končí výhrou. V ostatních případech bude hráč po splnění úkolu plnit následující úkol a při nesplnění úkolu musí znovu plnit předešlý úkol. První úkol přitom splní s pravděpodobností $3/4$, druhý s pravděpodobností $1/2$ a třetí s pravděpodobností $1/4$. Uvažujte markovský řetězec $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$, kde $X_n = 0$, pokud hráč v n-tém kole prohrál, $X_n = 4$, pokud hráč v n-tém kole vyhrál, a $X_n = i$, pokud hráč v n-tém kole řeší i-tý úkol, $i = 1, 2, 3$. Určete pro tento řetězec

a) matici pravděpodobností přechodu, (4 body)

b) pravděpodobnost, že hra skončí pro hráče výhrou. (10 bodů)

Úloha 3 — 50 domů, 33 bytů, 17 chat

šlohy 2, 2.5, 1, 10, 5

$$f(x) = \begin{cases} \beta^2 x e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

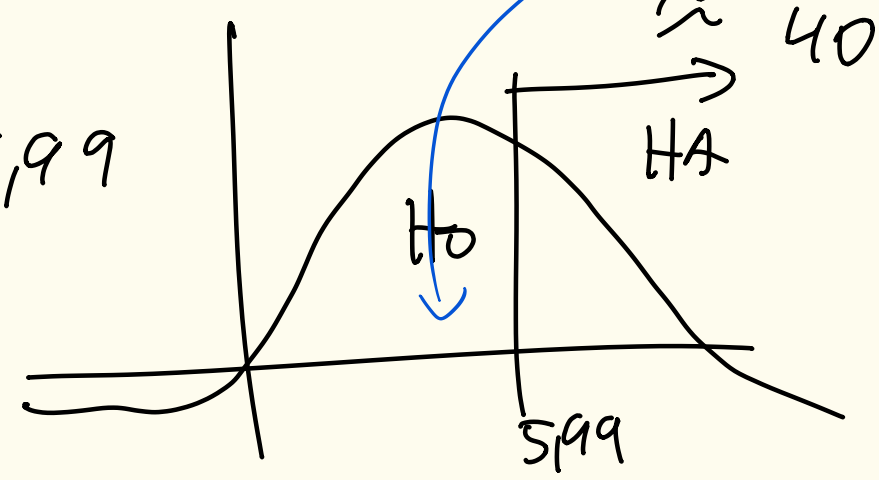
	D	B	Ch	Σ
data	50	33	17	100
teorie	40	40	20	100
Σ	90	73	37	200

$$\chi^2_{data} = \frac{(50-40)^2}{40} + \frac{(33-40)^2}{40} + \frac{(17-20)^2}{20} =$$

$$= \frac{100}{40} + \frac{49}{40} + \frac{9}{20} = \frac{100+49+18}{40} = \frac{169}{40} =$$

$$\overset{cca}{\approx} \frac{160}{40} = \frac{16}{4} = 4 = 4{,}1$$ (konečně odhad)

$\chi^2_{2;0,95} = 5{,}99$



H_0 nezamítáme ve prospěch H_A

5

(b) MMV:

(i)

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{5} f(x_i) = 2 \cdot \beta^2 e^{-2\beta} \cdot 2{,}5 \cdot \beta^2 \cdot e^{-2{,}5\beta} \cdot \ldots =$$

$$= 250 \cdot \beta^{10} e^{-20{,}5\beta}$$

$$\ell(\beta) = \ln(250) + 10 \ln(\beta) - 20{,}5\beta$$

$$\ell'(\beta) = \frac{10}{\beta} - 20{,}5 \overset{\text{extrem}}{=} 0$$

$$\frac{10}{\beta} = 20{,}5$$

$$10 = 20{,}5\beta \qquad \beta = \frac{10}{20{,}5} = \frac{100}{205} = \frac{20}{41}$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

(ii) MM:

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} \beta^2 x^2 e^{-\beta x}\,dx = \beta^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-\beta x}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^{-\beta x} & v = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \end{array} \right| = \left[-x^2 \frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \right]_0^{\infty} + 2\beta \int_0^{\infty} x e^{-\beta x}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-\beta x} & v = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \end{array} \right| = \left[x \cdot -\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} e^{-\beta x}\,dx =$$

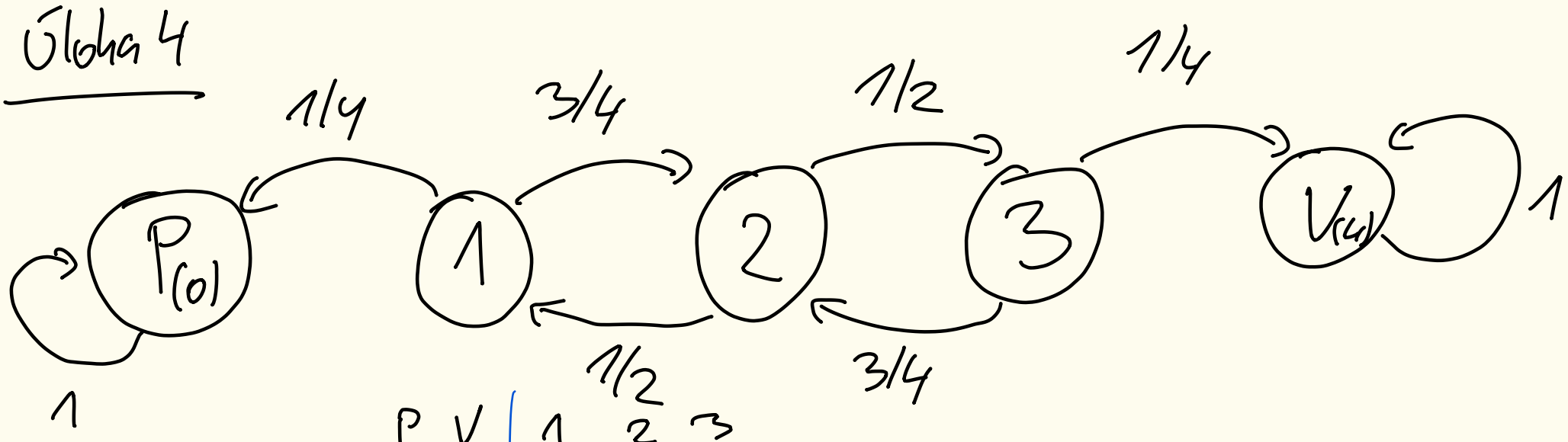
$$= 2\left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \right]_0^{\infty} = 2\left(0 + \frac{1}{\beta} \cdot 1 \right) = \underline{\underline{\frac{2}{\beta}}} = \mathbb{E}X$$

$$\overline{X} = \frac{20{,}5}{5} = \frac{2}{\beta}$$

$$20{,}5\beta = 10$$

$$\beta = \frac{10}{20{,}5} = \frac{100}{205} = \underline{\underline{\frac{20}{41}}}$$

Úloha 4



$$P = \begin{array}{c|cc|ccc} & P & V & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{array}$$

R Q

$$F = (I_3 - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -3/4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5/2 & 3 & 3/2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3/2 & 3 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$M = F \cdot R = \begin{pmatrix} 5/2 & 3 & 3/2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3/2 & 3 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 1/2 & 1/2 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$$

$$P^{(\infty)} = \begin{array}{c|cc|ccc} & P & V & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 5/8 & 3/8 & 0 & 3/4 & 0 \\ 2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 3/8 & 5/8 & 0 & 3/4 & 0 \end{array}$$

My hledáme $p_{1V}^{(\infty)} = 3/8$