B0B01PST Pravděpodobnost a statistika - zkouškový test 16.6.2022 (přednášející HELISOVÁ, cvičící BECK / KORBELÁŘ)

Jméno a příjmení	1	2	3	4	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 52 bodů)
Firma má oddělení A, B, C a D. IT podpora řeší ve firmě průměrně 12 problémů denně. Problémy nastávají v jednotlivých odděleních v poměru 2:2:1:1. Problémy mohou být jak na hardwaru, tak na softwaru, přičemž hardwaru se týká v oddělení A 40% problémů, v oddělení B 30% problémů, v oddělení C také 30% problémů a v oddělení D 10% problémů, všechny ostatní problémy se týkají softwaru. Problémy přicházejí vzájemně nezávisle na sobě. Spočtěte pravděpodobnost, že

a) příští problém, který ve firmě nastane, bude na softwaru, (5 bodů)

b) příští problém, který nastane na softwaru, bude v oddělení C, (5 bodů)

c) v oddělení A zítra zažijí bezproblémový den, (7 bodů)

d) v oddělení D dojde během půldne alespoň ke dvěma problémům, (7 bodů)

e) v oddělení D dojde během půldne alespoň ke dvěma problémům, přičemž žádný se nebude týkat hardwaru, (7 bodů)

f) nejpozději pátý problém, který ve firmě nastane, bude v oddělení B, (7 bodů)

g) mezi prvními pěti problémy jsou alespoň dva v oddělení B, (7 bodů)

h) mezi prvními 50 problémy je jich alespoň 20 v oddělení B. (Řešte pomocí CLV; 7 bodů)

Úloha 2. (celkem 32 bodů)
U silnice prodává farmář jahody, meruňky a třešně. Od rána zaznamenal 24 zájemců o jahody, 12 zájemců o meruňky a 18 zájemců o třešně. Meruňky a třešně se prodávají na váhu, zatímco jahody jsou již předchystané v košících po 500 gramech (dle tvrzení farmáře). K farmáři přijela kontrola, která zvážila 13 náhodně vybraných košíků jahod. Naměřené hmotnosti (v gramech) jsou uvedeny v následující tabulce:

505.5	485.7	482.6	494.9	489.8	497.7	503.2	496.6	500.9	497.2	508.9	489.0	491.5

a) Nakreslete histogram dat popisujících hmotnost náhodně vybraného košíku jahod a odhadněte, jaké mají tato data rozdělení. (5 bodů)

b) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je možné říct, že střední hmotnost košíku jahod je 500 g, proti alternativní hypotéze

Tabulka

	A	B	C	D	Σ
hardware	80	60	30	10	180
software	120	140	70	90	420
Σ	200	200	100	100	600

(a) $P(S) = \frac{420}{600} = \frac{42}{60} = \frac{21}{30} = \underline{\underline{\frac{7}{10}}}$

(b) $P(C|S) = \frac{70}{420} = \frac{7}{42} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

(c) X ... počet problémů za den v oddělení A

$X \sim Po(\lambda)$ 12 / den

1/3 · 12 / den

4 / den

$P(X=0) = \underline{\underline{e^{-4}}} \approx 1{,}8\,\%$

(d) Y ... počet problémů za 1/2

$Y \sim Po(\lambda)$ $\lambda = 1$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$

$= 1 - e^{-1}(1+1) = \underline{\underline{1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}26\,\%}}$

(e) Z ... počet problémů za 1/2 hr na software

$Z \sim Po(\lambda)$ 1 / pol den

$1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$ problémů / pol den

$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z<2) = 1 - e^{-0{,}1}(1+0{,}1) \approx 2\,\%$

(f) A ... počet problémů před prvním v B

$A \sim Ge(p) \qquad p = 1/3$

$$P(A \leq 4) = 1/3 + 1/3\, 2/3^1 + 1/3 \cdot 2/3^2 + 1/3 \cdot 2/3^3 + 1/3\, 2/3^4 =$$

$$= 1/3 + 2/9 + 4/27 + 8/81 + 16/243 =$$

$$= \frac{81 + 54 + 36 + 24 + 16}{243} = \underline{\underline{\frac{211}{243}}}$$

(g) B ... počet problémů v B

$B \sim Binom(n, p) \qquad n = 5,\ p = 1/3$

$$P(B \geq 2) = 1 - P(B=0) - P(B=1)$$

$$= \underline{\underline{1 - 2/3^5 - 1/3\, 2/3^4}} \approx 0{,}8$$

(h) X_i ... i-tý problém byl v B

$X_i \sim Alt(p) \qquad p = 1/3$

$\mathbb{E}X = 1/3$

$varX = 1/3\ 2/3 = 2/9$

$P(X_i = 0)$ problém nebyl v B

$P(X_i = 1)$ problém byl v B

$$P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i \geq 20\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 1/3 \cdot 50}{\underbrace{\sqrt{2/9 \cdot 50}}_{Z}} \leq \frac{20 - 1/3 \cdot 50}{\sqrt{2/9 \cdot 50}}\right)$$

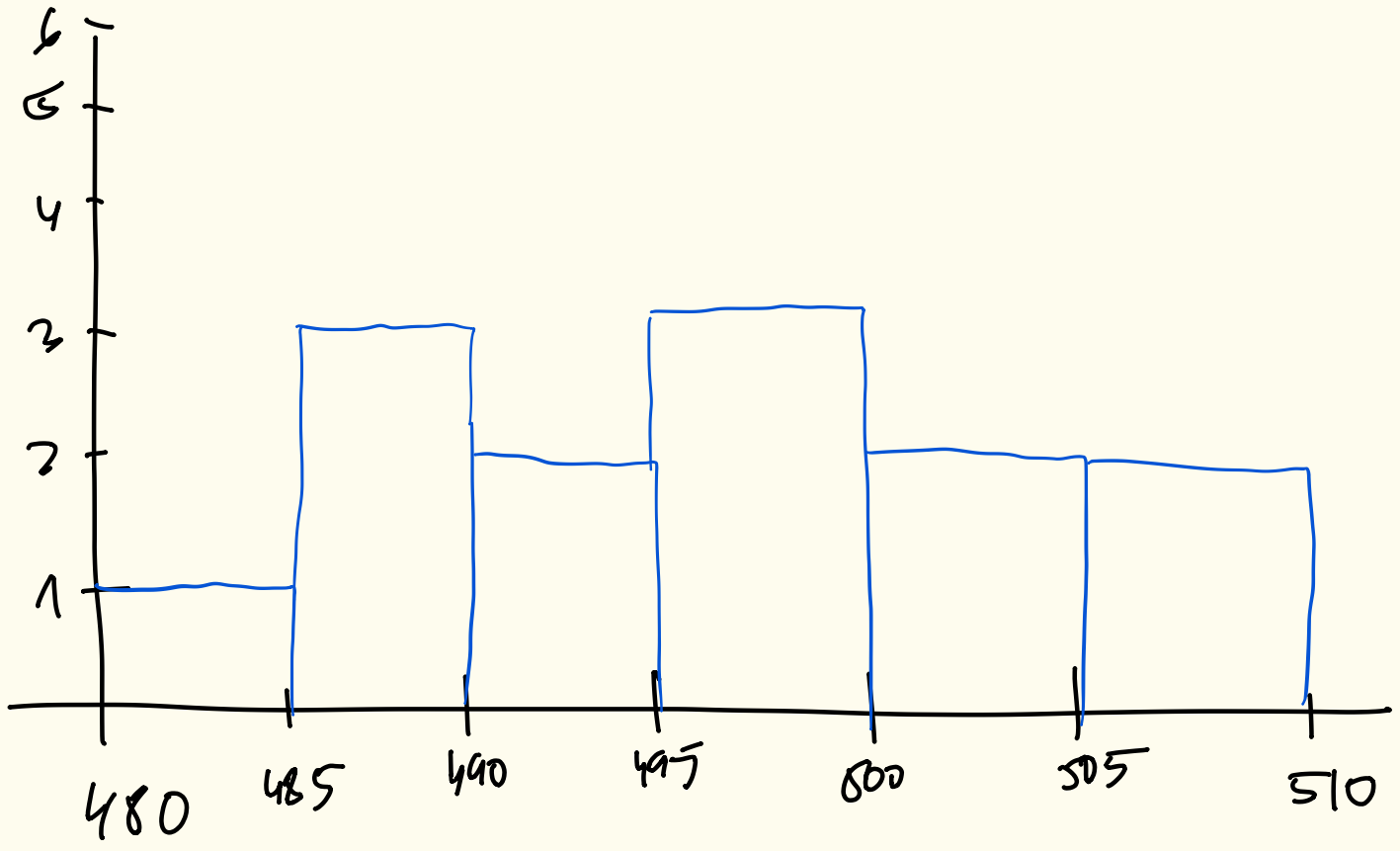
$$= 1 - \Phi(1)$$

$\sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$

$\frac{\frac{10}{3}}{\frac{10}{3}} = 1$

Úloha 2

(a)



Připomíná rovnoměrné rozložení

(b) Test střední hodnoty

$\overline{x} = \frac{6443,5}{13} \approx 495$

500 cca 495
13
1500
5000
= 6500

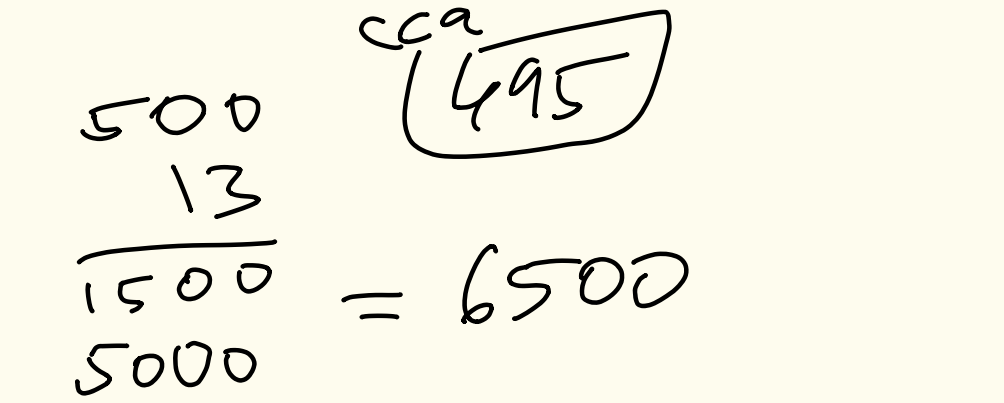
$s_x^2 = \frac{730}{12} \approx 61$

62
12
124
62
744
cca 61

$s_x = \sqrt{61} \approx 7,9$

H_0 ... střední hodnota je 500 g

H_A ... není



$T_{akt} = \frac{495-500}{7,9} \cdot \sqrt{13} \approx 3,4$

$\frac{-5}{7,9} \cdot \sqrt{13}$

cca -2

$\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{9} = 3$

125
5
0,625

$0,5 \times 3,5$

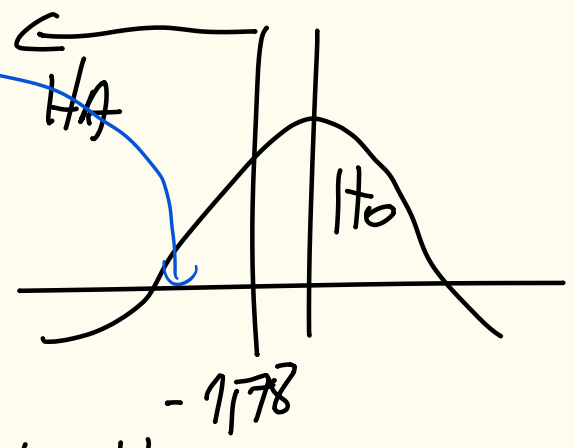
$1,75 \approx 2$

H_0 nezamítáme ve prospěch H_A

Statistická hodnota je menší než 500

$T_{data} \approx -2$

$t_{12;0,95} = 1,78$



H_0 zamítáme ve prospěch H_A

(C)

$\overline{X} = 500$

$S_X^2 = 64 = var X$

$500 = \frac{h+a}{2}$ $\quad 64 = \frac{(h-a)^2}{12}$ $\quad \frac{64}{12}$ / 128 / 64 / 768

$1000 = h+a$ $\quad 768 = (h-a)^2$

$a = 1000 - h$ $\quad 768 = a^2 - 2ah + h^2$

$768 = (1000-h)^2 - 2(1000-h)h + h^2$

$768 = 1000000 - 2000h + h^2 - 2000h + 2h^2 + h^2$

$0 = 4h^2 - 4000h + 999232$

$0 = 2h^2 - 2000h + 499616$

$0 = h^2 - 1000h + 249808$

$h_{12} = \frac{1000 \pm \sqrt{1000000 - 999232}}{2} =$ $\quad 249808$ / 4 / 999232

$= 1000 \pm \sqrt{768}$

$\frac{1027}{2} = \begin{matrix} 486 \\ 513 \end{matrix}$ $\quad R_0(486, 513)$

$P(X < 490) = \frac{490-486}{513-486} = \frac{4}{27} \approx 15\%$

(i) oboustranné,

(ii) vhodně zvolené jednostranné.

(Hint: $\sum x_i = 6443.5$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 730$; 10 bodů)

c) Předpokládejme (bez ohledu na výsledek b)), že skutečná střední hmotnost košíku jahod je 500 g a rozptyl je 64 (g^2). Spočtěte pravděpodobnost, že hmotnost náhodně vybraného košíku jahod je maximálně 490 g. (7 bodů)

d) Statisticky otestujte na hladině 1%, zda jsou

(i) všechny tři druhy ovoce,

(ii) jahody a meruňky

stejně oblíbené. (10 bodů)
(Pozn.: V části (ii) do testu nijak nezahrnujte zákazníky kupující třešně.)

Úloha 3. (celkem 8 bodů)
Pro Markovský řetězec s diskrétním časem se čtyřmi stavy 1, 2, 3 a 4 a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & a+b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & 9a & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

určete konstanty a, b a najděte stacionární rozdělení.

Úloha 4. (celkem 8 bodů)
Stěhovací vozík se pohybuje mezi nakládacím a vykládacím stanovištěm. Stanoviště jsou od sebe vzdálená 100 m. Cesta mezi nakládacím a vykládacím stanovištěm trvá vozíku 2 minuty (tj. z nakládacího do vykládacího stanoviště jede 2 minuty a z vykládacího do nakládacího stanoviště jede také 2 minuty). Vozík se pohybuje konstantní rychlostí v celém úseku. Naložení vozíku trvá 2 minuty, vyložení 4 minuty. Sestrojte distribuční funkci náhodné veličiny X popisující vzdálenost vozíku od nakládacího stanoviště.

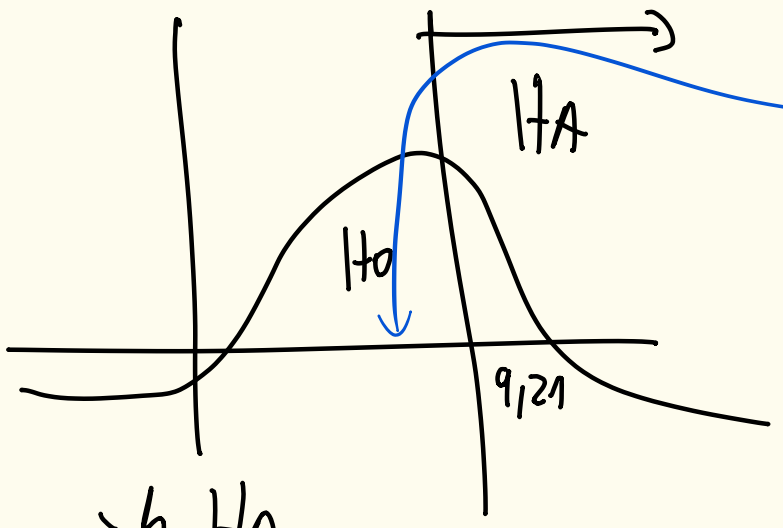
(d)	J	M	T	Σ
data	24	12	18	54
teorie	18	18	18	

Test dobré shody

$$\chi^2_{data} = \frac{(24-18)^2}{18} + \frac{(12-18)^2}{18} + \frac{(18-18)^2}{18} = \frac{6^2}{18} + \frac{6^2}{18} =$$

$$= \frac{72}{18} = 4$$

$\chi^2_{2,0,99} = 9{,}21$



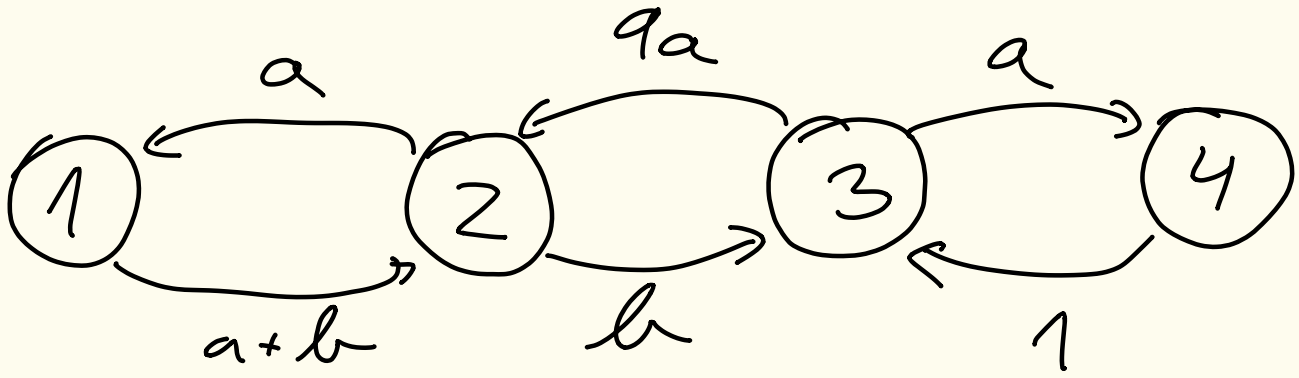
Nezamítáme H_0 ve prospěch H_A

	J	M	Σ
data	24	12	36
teorie	18	18	36

$$\chi^2_{data} = \frac{(24-18)^2}{18} + \frac{(12-18)^2}{18} = \frac{72}{18} = 4$$

$\chi^2_{1,0,99} = 6{,}63$ H_0 nezamítáme

Uppgift 3



$$9a + a = 1 \Rightarrow a = 0{,}1$$

$$a + b = 1 \Rightarrow b = 0{,}9$$

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\pi_1 = 0{,}1\pi_2$$

$$\pi_2 = \pi_1 + 0{,}9\pi_3$$

$$\pi_3 = 0{,}9\pi_2 + \pi_4$$

$$\pi_4 = 0{,}1\pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

$$\pi_2 = 0{,}1\pi_2 + 0{,}9\pi_3$$

$$0{,}9\pi_2 = 0{,}9\pi_3$$

$$\pi_3 = 0{,}9\pi_2 + 0{,}1\pi_3$$

$$0{,}9\pi_3 = 0{,}9\pi_2$$

$$\pi_3 = \pi_2$$

$$\pi_2 = 0{,}9\pi_2 + \pi_4$$

$$0{,}1\pi_2 = \pi_4$$

$$0{,}1\pi_2 + \pi_2 + \pi_2 + 0{,}1\pi_2 = 1$$

$$2{,}2\,\pi_2 = 1$$

$$\pi_2 = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} = \pi_3$$

$$\pi_4 = \frac{5}{11 \cdot 10} = \frac{1}{22} = \pi_1$$

$$\pi = \left(\frac{1}{22}, \frac{5}{11}, \frac{5}{11}, \frac{1}{22} \right)$$

Úloha 4