B0B01PST Pravděpodobnost a statistika - zkouškový test 20.6.2022 (přednášející HELISOVÁ, cvičící BECK / KORBELÁŘ)

Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 50 bodů)
Na akci pořádané jistou zoologickou zahradou u příležitosti Dne dětí dostávají děti odměnu za splnění úkolu formou žetonu do automatu. Po vhození žetonu jim vždy vypadne lízátko, bonbón nebo žvýkačka, přičemž tyto sladkosti jsou v automatu v poměru 1:2:2. Každá sladkost je v obalu buď se slonem nebo s žirafou nebo s tučňákem, přičemž obaly na lízátka tvoří ze 40% sloni a z 20% žirafy, obaly na bonbóny tvoří ze 30% sloni a ze 40% žirafy a obaly na žvýkačky tvoří z 25% sloni a z 25% žirafy. K automatu si přichází vybrat odměnu průměrně jedno dítě za tři minuty. Děti přicházejí k automatu nezávisle na sobě. Do automatu jsou stále doplňovány sladkosti tak, aby byl zachován poměr mezi druhy sladkostí uvedený výše. Spočtěte pravděpodobnost, že

a) příští vydaná sladkost bude v obalu s tučňákem, (5 bodů)

b) příští vydaná sladkost v obalu s tučňákem bude lízátko, (5 bodů)

c) příští vydané lízátko bude v obalu s tučňákem, (5 bodů)

d) na vydání příští žvýkačky budeme čekat nejvýše 10 minut, (7 bodů)

e) během 15 minut vydá automat nejvýše tři sladkosti, přičemž žádná z nich nebude v obalu s žirafou, (7 bodů)

f) mezi čtyřmi vydanými odměnami bude nejvýše jedno lízátko, (7 bodů)

g) nejpozději čtvrtá vydaná sladkost bude bonbón, (7 bodů)

h) je-li nyní v automatu 100 sladkostí a doplňování automatu se zaseklo, vydrží i tak automat vydávat odměny ještě alespoň čtyři hodiny. (Řešte pomocí CLV; 7 bodů)

Úloha 2. (celkem 17 bodů)
Zmrzlinář, který vydává ve stánku zmrzlinu, uvádí, že hmotnost jedné porce se pohybuje kolem 200 g. Zvážili jsme 14 vydaných porcí a zjistili, že hmotnosti (v gramech) byly:

191	227	169	189	194	200	151	193	157	177	211	216	181	182

a) Nakreslete histogram a odhadněte z něj a/nebo z povahy dat, jaké rozdělení má náhodná veličina popisující hmotnost jedné porce zmrzliny. (5 bodů)

b) Statisticky otestujte na hladině 5%, zda je střední jedné porce zmrzliny 200 g,

Úloha 1

	L	B	G	Σ
S	8	12	10	30
Ž	4	16	10	30
T	8	12	20	40
Σ	20	40	40	100

(a) $P(T) = 40/100 = 0{,}4$

(b) $P(L|T) = 8/40 = 2/10 = 1/5 = 0{,}2$

(c) $P(T|L) = 8/20 = 4/10 = 2/5 = 0{,}4$

(d) X ... počet vydaných žvýkaček za 10 minut

$X \sim Po(\lambda)$

1 odm / 3 minuty

1/3 o / min

10/3 obm. / 10 min.

$P(X=0) = e^{-4/3} \approx 0{,}26$ žvýkaček 2/5

20/15 žvýkaček / 10 min

4/3 ž / 10 min

(e) Y ... počet vydaných sladkostí (bez žvýkaček) za 15 minut

$Y \sim Po(\lambda)$

5 odm / 15 minut $P(\text{bez žvýkaček}) = \frac{70}{100} = 0{,}7$

$\frac{35}{10}$ bez žvýk / 15 min

7/2 b ž / 15 min

$$P(Y\le 3) = P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3) =$$

$$= e^{-3,5}\left(1+\frac{\frac{7}{2}}{1}+\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^3}{6}\right) = e^{-\frac{3}{5}}\left(1+\frac{7}{2}+\frac{49}{8}+\frac{343}{16}\right) =$$

$$= e^{-3,5}\left(\frac{16+56+98+343}{16}\right) = e^{-3,5}\left(\frac{513}{16}\right) \approx 0,96$$

(f) Z ... počet lízátek mezi 4 odměnami

$Z \sim Binom(n,p)$ $\quad n=4$ $\quad p=1/5$

$$P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(Z\le 1) = P(Z=0)+P(Z=1)$$

$$= 4/5^4 + 4\cdot 1/5\cdot 4/5^3 = 4/5^4 + 4/5^4 = \underline{\underline{2\cdot 4/5^4}} \approx 0,65$$

(g) A ... počet vydaných skladbiček před prvním lízátkem

$A \sim Ge(p)$ $\quad p = 2/5$ $\qquad P(A=k) = p(1-p)^k$

$$P(A\le 3) = P(A=0)+P(A=1)+P(A=2)+P(A=3)$$

$$= 2/5 + 2/5\,3/5 + 2/5\left(3/5\right)^2 + 2/5\left(3/5\right)^3 =$$

$$= 2/5 + 6/25 + \frac{18}{125} + \frac{54}{625} = \frac{250+150+90+54}{625} = \underline{\underline{\frac{544}{625}}}$$

(h) X_i ... doba očekávaná u vydání i-tého skladbičky

$X_i \sim Exp(\lambda)$ $\quad \mathbb{E}X_i = 3$ $\quad var X_i = \frac{1}{(\frac{1}{3})^2} = 9$

$\lambda = 1/3$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \ge 240\right) = 1-P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 3\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 9}} \le \frac{240-3\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 9}}\right)$$

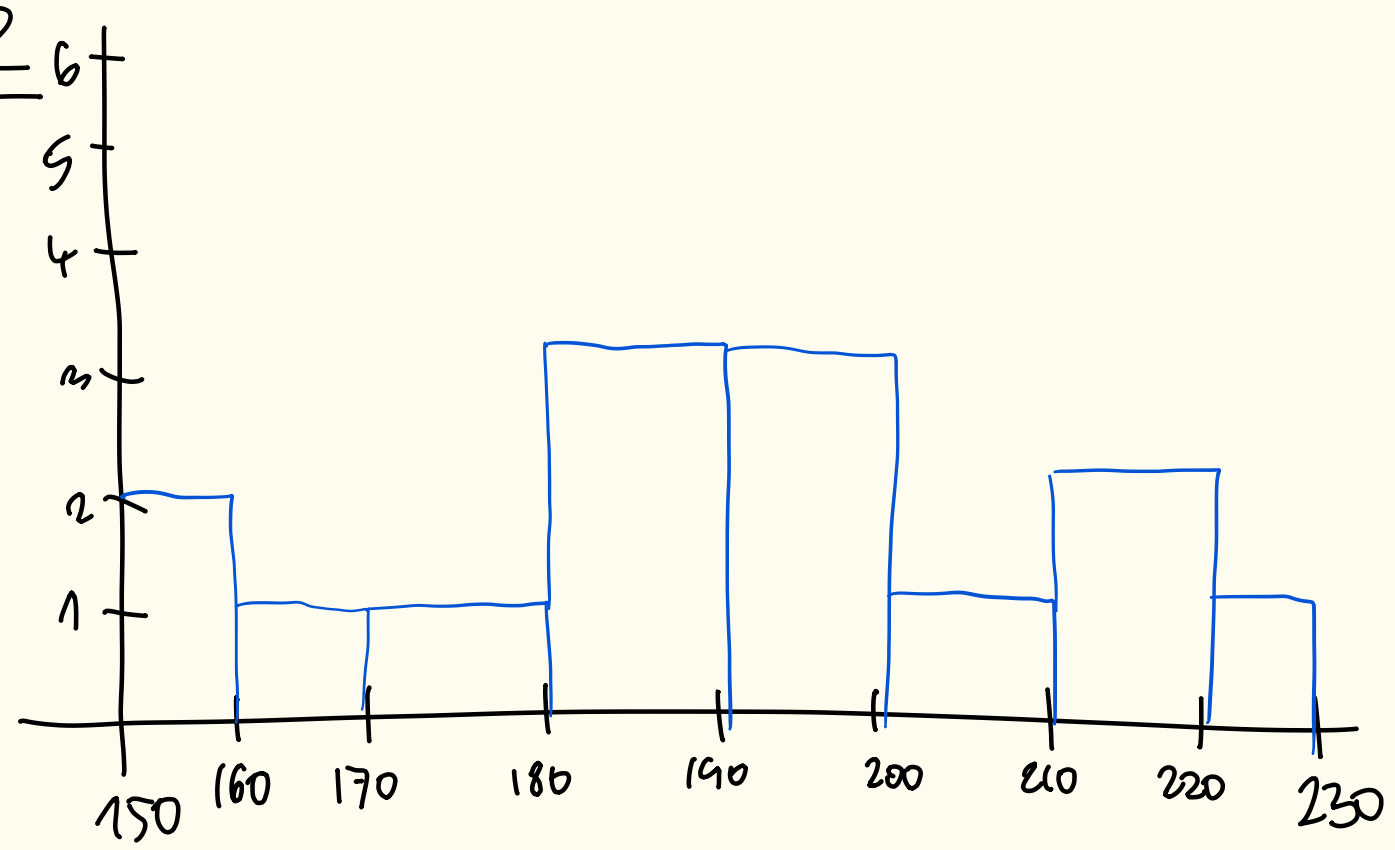
($240-3\cdot 100 = -60$)

$$= 1-\Phi(-2) = \Phi(2) \approx 0,9772$$

($\sqrt{100\cdot 9} = z = 30$, $\quad \frac{-60}{30} = -2$)

Úloha 2

(a)



Rozdělení by mělo nejspíše normální

(b) $\overline{x} = \frac{2638}{14} \approx 188$

$26:14 = 1$
14
12

$38:14 = 2$
28
10

$2638:14 = 188,\ldots$

$s_x^2 = \frac{5943}{13} \approx 457$

$5943:13 = 457,$
52
74
65
93
91

$s_x = \sqrt{457} \approx 21$

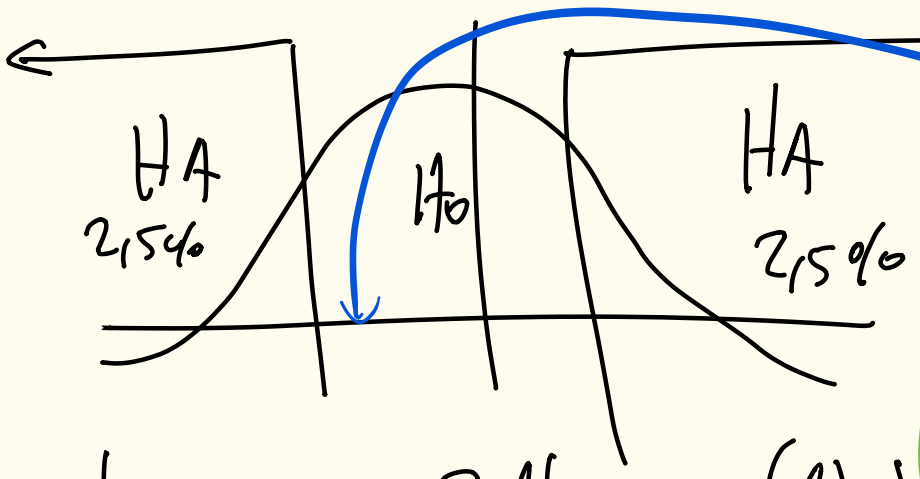
$21 \cdot 21 = 441$

Provedeme test střední hodnoty.

$T_{data} = \frac{188-200}{21}\sqrt{14} = -\frac{12}{21}\cdot\sqrt{14} = -\frac{12}{21}\frac{7}{2} = \frac{7}{4} = -2$

$\approx 3{,}5 \quad \approx 4$

$\frac{84}{42} = \frac{42}{21} = 2$



$t_{13;0,975} = 2{,}16$

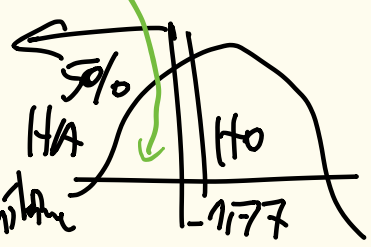
$t_{13;0,025} = -2{,}16$

pro 1% 3,37 nezamítáme

Ho nezamítáme ve prospěch HA.

(b) dělá méně než 200g

pro 1b: $-2{,}66$, nezamítáme



$t_{13;0,05} = -t_{13;0,95} = -1{,}77$

Ho zamítáme ve prospěch HA

(i) při oboustranné alternativě,

(ii) při jednostranné alternativě, která přirozeně vyplývá z kontextu.

(Hint: $\sum x_i = 2638$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 \doteq 5943$; 10 bodů)

c) Jak se (ne)změní závěry z bodu b), budeme-li testovat na hladině 1%? (2 body)

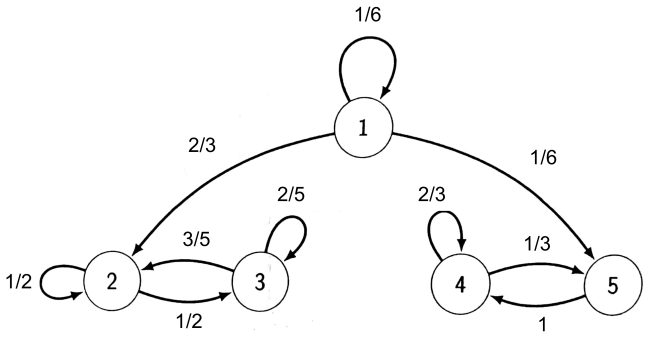
Úloha 3. (celkem 19 bodů)
Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{3} & , x \in \langle 0,\, 1) \\ \frac{1}{2} & , x \in \langle 1,\, 2) \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{2} & , x \in \langle 2,\, 4) \\ 1 & , x \in \langle 4, \infty) \end{cases}$$

a) Určete $P(1 < X < 3)$ a $P(1 \leq X \leq 3)$. (2+2 body)

b) Vyjádřete X jako směs $X = Mix_c(D, S)$ náhodných veličin D a S, kde D je diskrétní a S spojitá, tj. určete konstantu c a pak popište rozdělení pravděpodobnosti pro D a S (tj. pravděpodobnostní funkci $P(D = ...) = ...$ pro D a hustotu $f(x)$ pro S). (15 bodů)

Úloha 4. (celkem 11 bodů)
Pro markovský řetězec daný grafem



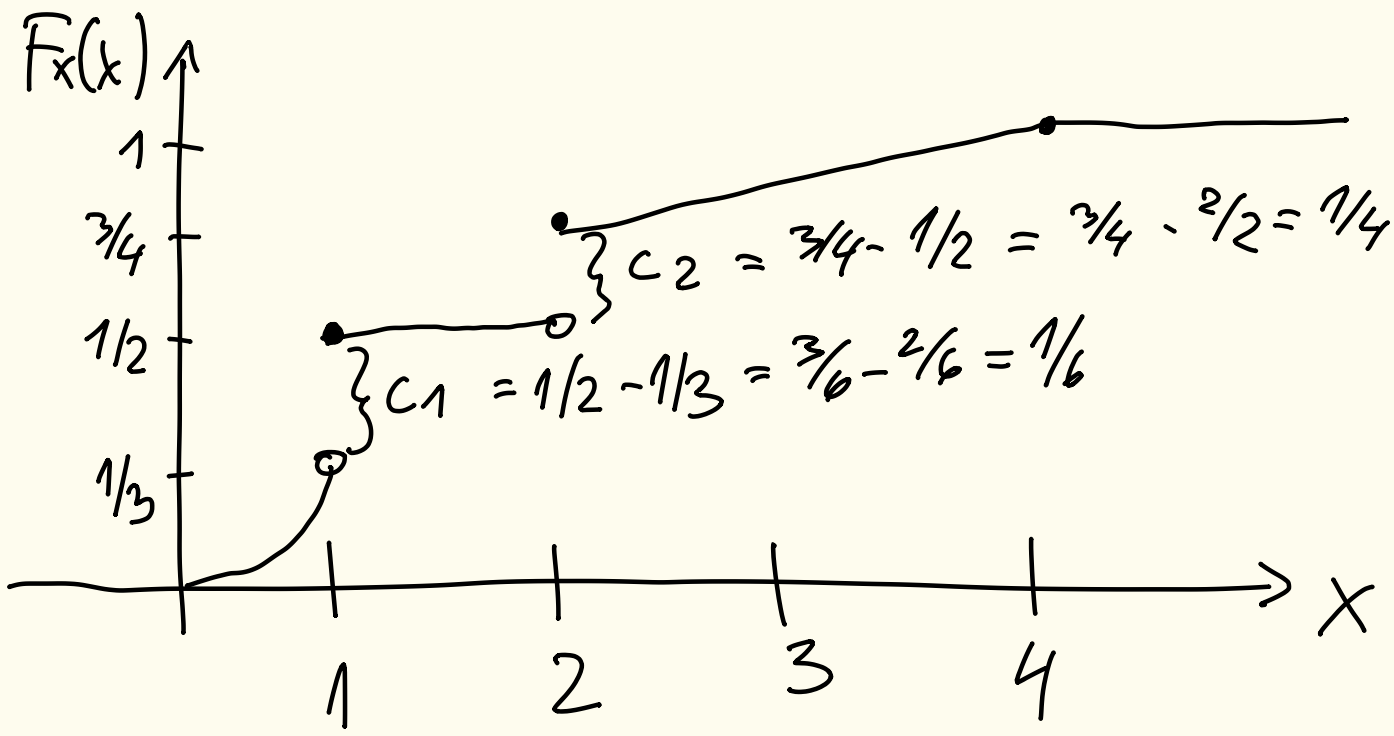
určete

a) matici pravděpodobností přechodu, (3 body)

b) stacionární rozdělení pro situaci, kdy řetězec vychází ze stavu 1. (8 bodů)

Úloha 5. (celkem 3 body)
Definujte nezávislost dvou spojitých náhodných veličin X a Y.

Úloha 3



$$\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}$$

$$C = C_1 + C_2 = 1/6 + 1/4 = \frac{2+3}{12} = \underline{\underline{5/12}}$$

(a) $P(1<X<3) = F_X(3) - F_X(1) = \frac{7}{8} - 1/2 = \frac{7}{8} - 4/8 = \underline{\underline{3/8}}$

$$P(1 \le X \le 3) = F_X(3) - \lim_{x \to 1^-} F_X(x) = \frac{7}{8} - 1/3 = \frac{21-8}{24} = \underline{\underline{13/24}}$$

(b) $X = Mix_C(D, S)$

Popis D: $P(D=1) = \frac{1/4}{5/12} = 3/5$

$P(D=2) = \frac{1/6}{5/12} = 2/5$

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 1) \\ 3/5 & x \in \langle 1, 2) \\ 1 & x \in \langle 2, \infty \end{cases}$$

Popis S:

$F_X(x) = C \cdot F_D(x) + (1-C) F_S(x)$

$F_X(x) = 5/12\, F_D(x) + 7/12\, F_S(x)$

$F_S(x) = \frac{12}{7} F_X(x) - 5/7\, F_D(x)$

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{4x^2}{7} & x \in \langle 0, 1) \\ 3/7 & x \in \langle 1, 2) \\ \frac{3x}{14} + 1/7 & x \in \langle 2, 4) \\ 1 & x \in \langle 4, \infty) \end{cases}$$

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{8x}{7} & x \in \langle 0, 1) \\ 0 & x \in \langle 1, 2) \\ \frac{3}{14} & x \in \langle 2, 4) \\ 0 & x \in \langle 4, \infty) \end{cases}$$

Úloha 4

(a)

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/6 & 2/3 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

V jednicce je přechodný stav, čili mimo $\pi_1 = 0$

$\pi_2 = 1/2\,\pi_2 + 3/5\,\pi_3$

$\pi_3 = 1/2\,\pi_2 + 2/5\,\pi_3$

$\pi_4 = 2/3\,\pi_4 \Rightarrow \pi_4 = 0$

$\pi_5 = 1/3\,\pi_4 \Rightarrow 0$

$1/2\,\pi_2 = 3/5\,\pi_3$

$3/5\,\pi_3 = 1/2\,\pi_2$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$ ($\pi_1 \to 0$, $\pi_4 \to 0$)

$\pi_2 = 3/13$

$3/10\,\pi_3 + \pi_3 = 1$

$13/10\,\pi_3 = 1 \quad \pi_3 = \frac{10}{13}$

Stac. rozdělení: $\pi = (0, 3/13, 10/13, 0, 0)$

Úloha 5

Spojité veličiny

X, Y jsou nezávislé, pokud platí $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ pro $\forall x, y$