B0B01PST Pravděpodobnost a statistika - zkouškový test 22.6.2022 (přednášející HELISOVÁ, cvičící BECK / KORBELÁŘ)

Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	celkem	známka

Úloha 1. (celkem 51 bodů)
Telefon v jistém call-centru je vybavený zábavným doplňkem - krabicí, v níž jsou kuličky červené, modré nebo bílé barvy ze tří různých materiálů - skleněné, dřevěné a hliněné - a v různých velikostech. Vždycky, když zazvoní telefon, vypadne náhodně vybraná kulička. Tu operátoři po zvednutí telefonu vrátí zpět do krabice. Červených kuliček je v krabici polovina, z nichž 40% je skleněných a 40% je dřevěných. Modrých kuliček je v krabici 30%, z nichž 1/6 je skleněných a 1/3 dřevěných. Z bílých kuliček je pak 1/4 skleněných a 1/4 dřevěných. Průměr kuličky [v cm] je náhodná veličina s rozdělením $Ro(2, 4)$, která je nezávislá jak na barvě, tak na materiálu kuličky. Telefon zazvoní průměrně čtyřikrát za 10 minut. Určete pravděpodobnost, že

a) při zazvonění telefonu vypadne kulička, která je modrá nebo hliněná (6 bodů)

b) vypadne-li skleněná kulička, bude červená, (5 bodů)

c) náhodně vypadnutá kulička je bílá a zároveň má v průměru alespoň 3,5 cm, (5 bodů)

d) na příští vypadnutí kuličky budeme čekat alespoň tři minuty, (7 bodů)

e) během pěti minut vypadnou z krabice nejvýše dvě červené kuličky, (7 bodů)

f) nejpozději pátá vypadnutá kulička je hliněná, (7 bodů)

g) mezi prvními pěti vypadnutými kuličkami jsou alespoň dvě dřevěné červené kuličky, (7 bodů)

h) pokud by operátoři kuličky do krabice nevraceli, nýbrž vždy po vypadnutí je navlékali na nit těsně za sebou tak, aby středy kuliček ležely v jedné přímce, vešla by se řada 75 kuliček na nit dlouhou 2,3 m (řešte pomocí CLV; 7 bodů).

Úloha 2. (celkem 12 bodů)
O náhodných veličinách X a Y se sdruženými a marginálními pravděpodobnostmi uvedenými v následující tabulce

$X \downarrow \quad Y \rightarrow$	1	3	
1	a	b	1/3
2	c	d	e
	f	2/3	g

e nutně 2/3 g nutně 1
f nutně 1/3

rozhodněte, zda můžeme nalézt parametry a, b, c, d, e, f a g tak, aby

potom $a = 1/3 - b$ $a = 1/3 - c$
$c = 2/3 - d$ $b = 2/3 - d$
$a = 1/3 - 2/3 + d = d - 1/3$

$cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$ $1/3 - c = 1/3 - b$ $b = c$

Aby $corr = 0$, stačí aby $cov(X,Y) = 0$ $c = 2/3 - 2/3 + b$ $c = b$

$\mathbb{E}XY = a + 3b + 2c + 6d = -1/3 + 5b + 7d = 3 + 2d$

$\mathbb{E}X = a + b + 2c + 2d = -1/3 + 3b + 3d = 5/3$

$\mathbb{E}Y = a + c + 3b + 3d = -1/3 + 4b + 4d = 7/3$

a) $corr(X,Y) = 0$,

b) $corr(X,Y) = 1$,

c) $corr(X,Y) = -2$. → velice, corr se pohybuje v rozmezí $\langle -1, 1 \rangle$

(a)

1/9	2/9
2/9	4/9

→ $cov(X,Y) = 0$ $3 + 2d = 7/3 \; 5/3 = 35/9$

$\Rightarrow cov(X,Y) = 0$ $2d = 8/9$ $d = 4/9$

Pokud ano, určete dané parametry, pokud ne, zdůvodněte proč.

Úloha 3. (celkem 15 bodů)
V jistém baru sledovali po dobu jednoho večera oblíbenost alkoholických nápojů u tuzemských a zahraničních turistů. Byla zjištěna následující konzumace:

	pivo	víno	tvrdý alkohol
tuzemský turista	250	150	100
zahraniční turista	150	150	200

Statisticky otestujte

a) na hladině 5%, zda můžeme považovat zákazníkem vybraný druh alkoholu za závislý na státní příslušnosti (ve smyslu domácí nebo cizinec). (8 bodů)

b) na hladině 1%, zda jsou všechny zmíněné druhy alkoholu přibližně stejně oblíbené. (7 bodů)

Úloha 4. (celkem 15 bodů)
Máme 4 kostky náhodně rozmístěné do dvou nádob A a B. V každém kroku vybereme náhodně rovnoměrně jednu kostku a přemístíme ji do druhé nádoby. Pokud je jedna z nádob prázdná, proces končí. Určete pravděpodobnost, že skončíme s prázdnou nádobou A, jestliže v ní na začátku byly 3 kostky.

Úloha 5. (celkem 7 bodů)
Stěhovací vozík se pohybuje mezi nakládacím a vykládacím stanovištěm. Stanoviště jsou od sebe vzdálená 100 m. Cesta mezi nakládacím a vykládacím stanovištěm trvá vozíku 2 minuty (tj. z nakládacího do vykládacího stanoviště jede 2 minuty a z vykládacího do nakládacího stanoviště jede také 2 minuty). Vozík se pohybuje konstantní rychlostí v celém úseku. Naložení vozíku trvá 2 minuty, vyložení 4 minuty. Sestrojte distribuční funkci náhodné veličiny X popisující vzdálenost vozíku od nakládacího stanoviště.

Úloha 1

	Č	M	B	Σ
S	120	30	30	180
D	120	60	30	210
H	60	90	60	210
Σ	300	180	120	600

(a) $P(M \cup H) = \frac{180+210-90}{600} = \frac{300}{600} = \underline{\underline{1/2}}$

(b) $P(\check{C}|S) = \frac{120}{180} = \frac{60}{90} = \frac{6}{9} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

(c) $P(B) = \frac{120}{600} = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \underline{\underline{1/5}}$

$P(X \geq 3,5) = 1 - P(X \leq 3,5) = 1 - F_X(3,5)$

$= 1 - \frac{x-2}{2} = 1 - \frac{1,5}{2} =$

$= 1 - 0,75 =$

$1/4$

jelikož jsou jevy B nezávislé, bude výsledná pravděpodobnost:

$P(B \cap P_{X \geq 3,5}) = 1/5 \cdot 1/4 = \underline{\underline{1/20}}$

(d) X ... počet hvězdiček za 3 minuty

$X \sim Po(\lambda)$

4/10 minut

2/5 za minutu

6/5 za 3 minuty

$P(X = 0) = e^{-6/5}$

(e) Y ... počet cestujících hmlich za 5 minut

$Y \sim Po(\lambda)$ 2 / 5 minut

1 cestující / 5 minut

$$P(Y \le 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) =$$

$$= e^{-1}\left(\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!}\right) = \underline{\underline{2{,}5e^{-1}}}$$

(f) Z ... počet hmlich před první hlinovou

$Z \sim Ge(\lambda)$ $\quad P(H) = {}^{210}/_{600} = {}^{21}/_{60} = {}^{7}/_{20}$

$P(Z=4) = p(1-p)^4$

$$P(Z \le 4) = \sum_{i=0}^{4} P(Z=i) = p\sum_{i=1}^{4}(1-p)^i = 1-(1-p)^5$$

$$= 1 - \left({}^{13}/_{20}\right)^5$$

(g) A ... počet dvanáctých cestujících hmlidek mezi 5 vypadnutými

$n=5$ $\quad P(D \cap \check{C}) = {}^{120}/_{600} = {}^{12}/_{60} = {}^{2}/_{10} = {}^{1}/_{5}$

$A \sim Binom(n, p)$

$$P(A \ge 2) = 1 - P(A=0) - P(A=1)$$

$$= 1 - 4/5^5 - 5 \cdot 1/5\, 4/5^4 = \underline{\underline{1 - \left(4/5\right)^5 - \left(4/5\right)^4}}$$

(h) X_i ... průměr i-té hmlidky

$X_i \sim Ro(2,4)$

$$\mathbb{E}X = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$var X = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{4}{12} = 1/3$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{75} X_i \ge 230\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{75} X_i - 75\cdot 3}{\sqrt{1/3 \cdot 75}} \le \frac{230 - 75\cdot 3}{\underbrace{\sqrt{1/3 \cdot 75}}_{=5}}\right) = \underline{\underline{1 - \Phi(1)}}$$

Úloha 3

	P	V	A	Σ
T	250	150	100	500
Z	150	150	200	500
Σ	400	300	300	1000

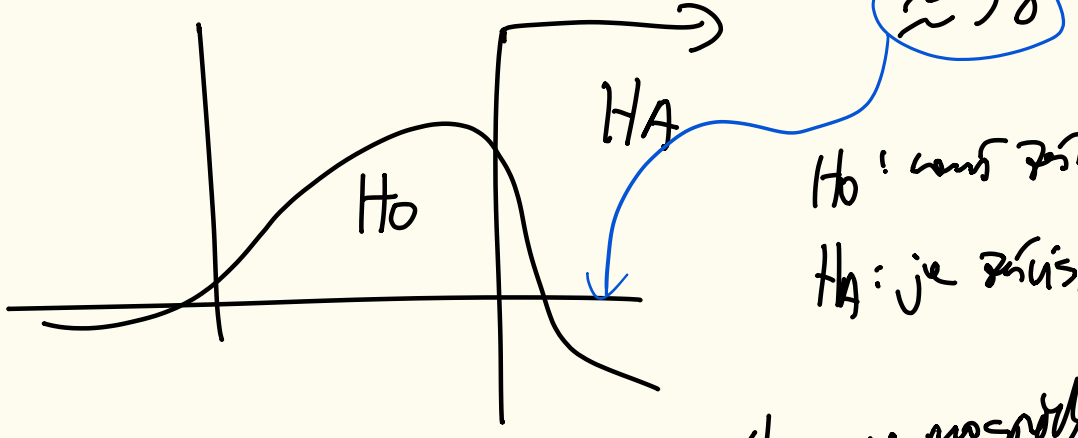
Pomocná tabulka:

	P	V	A
T	200	150	150
Z	200	150	150

$$\chi^2 = \frac{(250-200)^2}{200} + \frac{(150-150)^2}{150} + \frac{(100-150)^2}{150} + \frac{50^2}{200} + 0 + \frac{50^2}{150} =$$

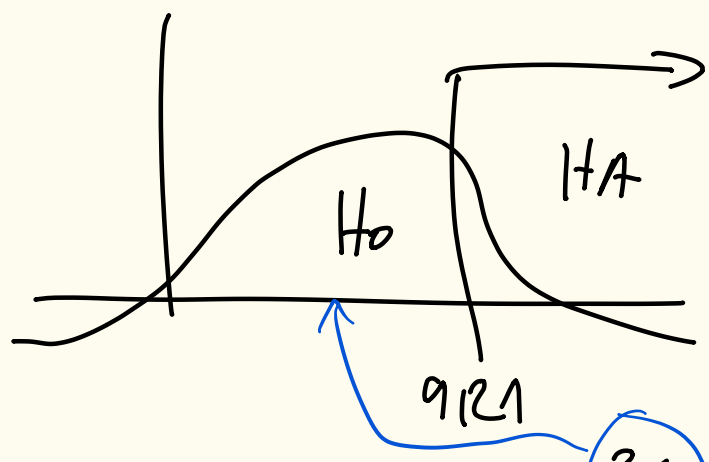
$$= \frac{50^2}{200} + \frac{50^2}{150} + \frac{50^2}{200} + \frac{50^2}{150} = \frac{5000}{200} + \frac{5000}{150} = 25 + \frac{100}{3} \simeq 58$$

$$\chi^2_{2;0,95} = 5,99$$



(b) vytvoříme novou tabulku

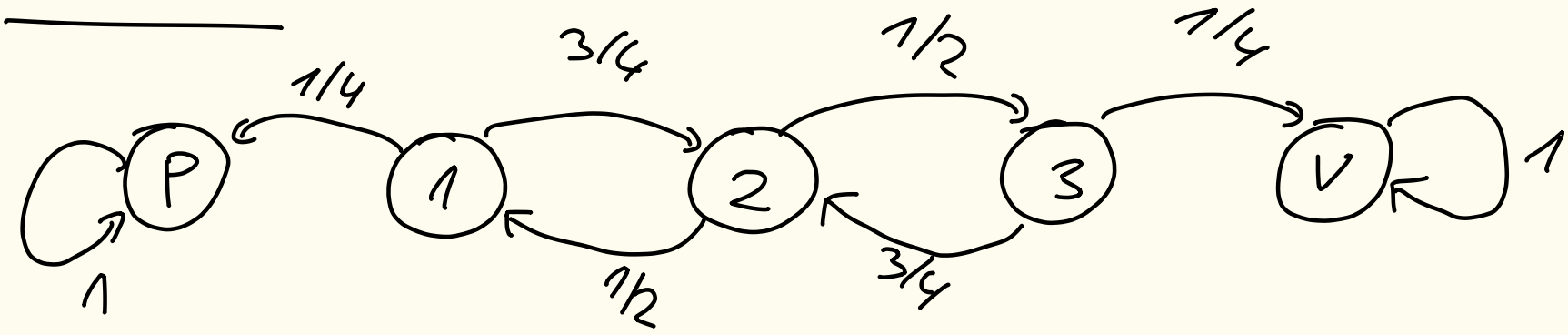
	P	V	T	Σ
data	400 12	300 9	300 9	30
teorie	10	10	10	



$$\chi^2_{data} = \frac{(12-10)^2}{10} + \frac{(9-10)^2}{10} + \frac{(9-10)^2}{10} = 4/10 + 1/10 + 1/10 = 6/10 = \frac{3}{5}$$

$\chi^2_{2;0,99} = 9,21$ H0 nezamítáme ve prospěch HA

Úloha 4



$$P = \begin{array}{c} \\ P \\ V \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} P & V & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

R Q

$$F = (I_3 - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3 & 3/2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3/2 & 3 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$M = F \times R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 1/2 & 1/2 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hledáme $p_{3P}^{(\infty)} = 3/8$

```
with(LinearAlgebra) :
Q := <<0|3/4|0>, <1/2|0|1/2>, <0|3/4|0>>;
R := <<1/4|0>, <0|0>, <0|1/4>>;
```

$$Q := \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$R := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

```
I_3 := IdentityMatrix(3);
```

$$I_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
F := MatrixInverse(I_3 - Q);
```

$$F := \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 & 2 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

```
M := F . R
```

$$M := \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

```
result := M[3][1];
```

$$result := \frac{3}{8}$$

Úloha 1. (celkem 43 bodů)
Zaměstnanec FELu, který má kancelář v budově CIIRKu (tj. u zastávky tramvaje Lotyšská), se po práci stavuje na večeři na Vítězné náměstí. Tramvaj odjíždí ze zastávky Lotyšská do zastávky Vítězné náměstí jednou za 5 minut minut."Cesta tramvají mezi těmito zastávkami trvá 1 minutu, pěšky zaměstnanec tuto trasu ujde za 4 minuty. Zaměstnanec FELu přichází na zastávku bez ohledu na jízdní řád, jeho příchody na zastávku jsou vzájemné nezávislé a až na zastávce se rozhodne, zda na Vítězné náměstí pojede tramvají nebo půjde pěšky, podle toho, co je pro něj časově výhodnější. V tramvaji v té době bývá průměrně 20 cestujících. Spočtěte pravděpodobnost, že

a) zaměstnanec při příští cestě mezi zastávkami půjde pěšky, (6 bodů)

b) nejpozději třetí cestu z Lotyšské na Vítězné náměstí absolvoval tramvají, (7 bodů)

c) nastoupil-li do tramvaje, bylo v ní alespoň 5 cestujících, (7 bodů)

d) z pěti cest z Lotyšské na Vítězné náměstí jel alespoň třikrát tramvají, (7 bodů)

e) z 54 cest z Lotyšské na Vítězné náměstí jel alespoň 30× tramvají; řešte použitím CLV. (8 bodů)

f) během 27 cest z Lotyšské na Vítězné náměstí, které absolvoval tramvají, strávil celkově čekáním na tramvaj nejvýše třičtvrtě hodiny; řešte použitím CLV. (8 bodů)

(a) student na tramvaj se vyplatí pouze tehdy, pokud by čekal maximálně 3 minuty
čili pěšky jde právě tehdy, pokud čekání déle, než 3 min

$P(\text{chůze}) = 2/5$

(b) X... počet cest před první tramvají

$X \sim Ge(p) \quad p = 2/5$

$P(X \le 2) = \sum_{i=1}^{2} p(1-p)^i = 1-(1-p)^3 = \underline{\underline{1-(3/5)^3}}$

(c) Y... počet cestujících v kolejích z Lotyšské na VN

$Y \sim Po(\lambda) \quad \lambda = 20$

$P(Y \ge 5) = 1 - P(Y < 5) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2) - P(Y=3) - P(Y=4) =$

$= 1 - e^{-20}\left(1 - 20 - \frac{20^2}{2} - \frac{20^3}{6} - \frac{20^4}{24}\right)$

(d) Z... počet jízd tramvají mezi pěti cestami

$Z \sim Binom(n,p) \quad n=5 \quad p=3/5 \quad P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$P(Z \ge 3) = 1 - P(Z=0) - P(Z=1) - P(Z=2)$ $\quad \frac{150-162}{5} = -12/5$

$= 1 - (2/5)^5 - 5 \cdot 3/5 (2/5)^4 - 10 (3/5)^2 (2/5)^3$

$= \frac{30 - 54\,3/5}{\sqrt{6/25 \cdot 54}}$

(e) X_i... jel tramvají

$X_i \sim Alt(p) = 3/5$

$P(X=0) = 2/5 \quad \mathbb{E}X = 3/5$

$P(X=1) = 3/5 \quad \mathrm{var}X = 3/5 \cdot 2/5 = 6/25$

$P\left(\sum_{i=1}^{54} X_i \ge 30\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{54} X_i - 54 \cdot 3/5}{\sqrt{6/25 \cdot 54}} \le \frac{-12/5}{18/5} = -2/3\right)$

$= \Phi(-2/3)$ $\quad z = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{5} = 18/5$ $\quad \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 5}$

(f) 27 cest max 45 min

X_i ... doba čekání na tramvaj

$X_i \sim Rs(0,3)$ $\mathbb{E}X = \frac{3}{2}$ $\mathrm{var}X = \frac{3^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$$P\left(\sum_{i=1}^{27} X_i \le 45\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{27} X_i - 27 \cdot \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4} \cdot 27}} \le \frac{45 - \frac{3}{2} \cdot 27}{\sqrt{\frac{3}{4} \cdot 27}}\right)$$

$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot 27} = z$

$\frac{90-81}{2} = \frac{9}{2}$

$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{9}{2}$

$\Phi(1)$