Př. Ke zkoušce je třeba znát 20 otázek. Student umí 15 z nich. U zkoušky si náhodně vybere 4. Jaká je pst, že správně odpoví právě na 3 z nich?

$$P(\quad) = \frac{\binom{15}{3}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{20}{4}}$$

$X \sim Hypergeom(N, K, n)$

N objektů, z nichž K má nějakou vlastnost, přičemž náhodně vybíráme n objektů

X ... počet správně zodpovězených otázek:

$$P(X=4) = \frac{\binom{15}{4}\cdot\binom{5}{4-4}}{\binom{20}{4}}$$

pro $4 = 0, \dots, 4$

$N=20, K=15, n=4$

—11— $K=2$ —11—

—11— $4=17$ —11—

nelze aby zodpovědělo 4 správně

SOUHRN: Příklady (základní modely) náh. veličin

SOUHRN: Příklady (základní modely) náh. veličin

I. 1) $X \sim Alt(p)$, tj. $P(X=1)=p$ a $P(X=0)=1-p$ ... model pro úspěch (1) vs neúspěch (0) v jednom pokusu

2) $X \sim Binom(n,p)$, tj. $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pro $k=0,\dots,n$ ... model pro počet úspěchů v n nezávislých pokusech

3) $X \sim Po(\lambda)$, tj. $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ pro $k=0,1,\dots$ model pro počet vzájemně nezávislých událostí v daném časovém intervalu, na dané ploše,

4) $X \sim Geom(p)$, tj. $P(X=k)=(1-p)^k p$ pro $k=0,1,\dots$ model pro počet neúspěchů před prvním úspěchem

5) $X \sim Hypergeom(N,K,n)$, tj. $P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ pro $k=\max(0,K+n-N),\dots,\min(n,K)$ máme N objektů, z nich K s vlastností blabla, vybíráme n objektů, X ... počet vybraných objektů s vlastností blabla

Pozn.: Modelů existuje více, např. rovnoměrné diskrétní rozložení (např. X... počet puntíků, které padly na kostce), Diracovo: $P(X=a)=1$

Diracova míra

$$\delta_x(a)\begin{cases}1 & \text{pro } x=a\\ 0 & \text{pro } x\neq a\end{cases}$$

Každý diskrétní rozložení je směsí Diracových rozložení (Diracových měr), např $X \sim Alt(p)$ → rozložení je

$$p\cdot\delta_x(1)+(1-p)\delta_x(0)$$

Vzájemné souvislosti: 1.) $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, kde $X_i \sim Alt(p) \Rightarrow X \sim Binom(n,p)$

2.) $X \sim Binom(n,p)$, tj. $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$$\xrightarrow[p\to 0]{n\to\infty,\ np=\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=P(\tilde{X}=k), \text{ kde } \tilde{X}\sim Po(\lambda)$$

3) $X \sim Hypergeom(N,K,n) \xrightarrow[N,K\to\infty,\ \frac{K}{N}=p]{} \tilde{X} \sim Binom(n,p)$

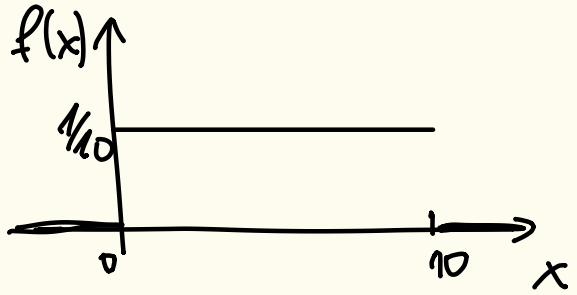
4) $X \sim Exp(\lambda)$ a $Y \sim Po(\lambda t)$ ... počet vzájemně nezávislých událostí za dobu t; λ... intenzita $\frac{\text{počet událostí}}{\text{čas}}$

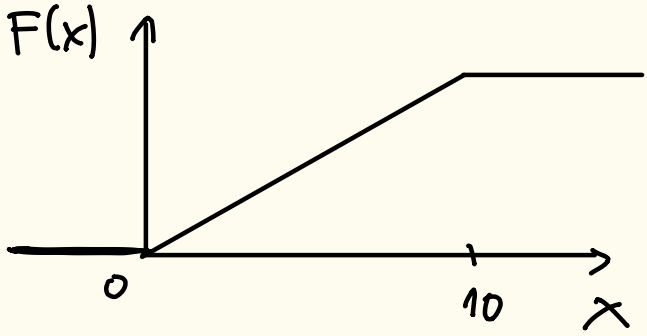
↓

vztahes ... model doby čekání na události při dodržení vzájemné nezávislosti za sebe

II. Spojité n.v. [min]

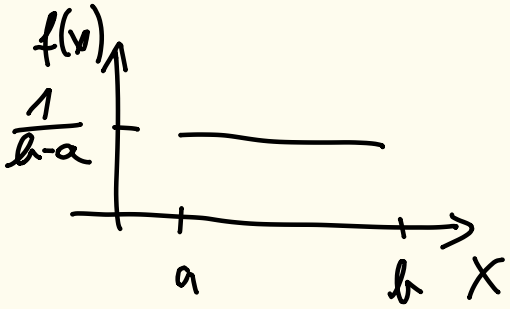
1) X... doba čekání na bus, interval 10 min, nerozlišujeme víd

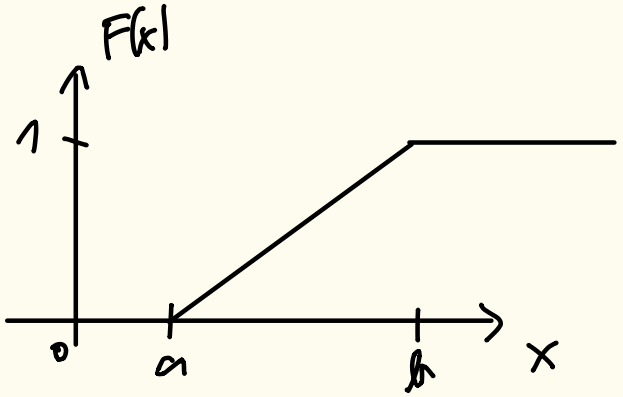




$X \sim Ro(0;10)$

↓ obecně





$\frac{1}{b-a}$ ... součástka dělby (výška obdélníku)

$x-a$ ... posun na vodorovné ose

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 0x\,dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} x\,dx + \int_{b}^{\infty} 0x\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{(b-a)2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{b-a} =$$

$$= \frac{a+b}{2} \quad \text{... střed intervalu } \langle a,b\rangle$$

$$\text{var } X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \quad (*)$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$(*)\quad \text{var}X = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

[měsíců]

X... doba zchaví než praskne první žárovka v bytově, když průměrně praskne v bytově 3 žárovky měsíčně

minulý týden: $P($ za 2 měsíce praskne alespoň 4 $)$

Y ... počet prasklých žárovek za 2 měsíce

λ

$Y \sim Po(6 = \lambda \cdot 2)$ $\quad$ tj $P(Y=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

$\lambda \cdot 1$

$$P(X \le t) = P(Y \ge 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!}\cdot e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$\parallel$ (v mém případě $F(t) = 1-e^{-3t}$)

$F(t)$ pro $t > 0$

(dist. fce pro X) $= 0$ pro $t \le 0$

$$f(x) = F'(x) = 0 \text{ pro } x \le 0$$
$$= \lambda e^{-\lambda x} \text{ pro } x > 0$$

λ ... intenzita = počet (průměrný) událostí za jednotku času

v našem případě $f(x) = 3e^{-3x}$ pro $x > 0$

$= 0$ $x \leq 0$

Jaká je pst, že na přestupní železniční soustavě čekat alespoň 1,5 měsíce? $X \sim Exp(3) \Rightarrow P(X \geq 1,5) = \int_{1,5}^{\infty} 3e^{-3x} dx =$

$= 3\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_{1,5}^{\infty} = 0 - (-e^{-3 \cdot 1,5}) = e^{-4,5}$

nebo $= 1 - P(X \leq 1,5) = 1 - F(1,5) = 1 - (1 - e^{-3 \cdot 1,5}) = e^{-4,5}$

$\tilde{Y}$ počet přestupních za 1,5 měs. $\Rightarrow \tilde{Y} \sim Po(4,5) \Rightarrow p(\tilde{Y} = 0) =$

$= \frac{4,5^0}{0!} e^{-4,5} = e^{-4,5}$

X... doba čekání na událost $\sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow Y$... počet událostí za dobu $\langle 0, t \rangle \sim Po(\lambda t)$

$\Leftarrow$ viz odvození distr. fce pro X

$\Rightarrow$ ozn. X_i ... doba čekání mezi $(i-1)$. událostí a i. událostí

$\Rightarrow p(Y = k) = P(\underbrace{X_1 + X_2 + \ldots + X_k}_{Z_k} \leq t < \underbrace{X_1 + X_2 + \ldots + X_{k+1}}_{Z_{k+1}}) =$

$= P(A \cap B) =$

kde Z_ℓ ... doba čekání na ℓ-tou událost

$A \ldots Z_k \leq t$

$B \ldots Z_{k+1} > t$

$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$

$P(B|A) = 1 - P(B^c|A)$

$$= P(Z_{k+1} > t \mid Z_k \le t) \cdot P(Z_k \le t) = \left(1 - P(Z_{k+1} \le t \mid Z_k \le t)\right) \cdot P(Z_k \le t)$$

$$= \left(1 - \frac{P(Z_{k+1} \le t)}{P(Z_k \le t)}\right) \cdot P(Z_k \le t) = P(Z_k \le t) - P(Z_{k+1} \le t) =$$

$$= F_k(t) - F_{k+1}(t)$$

ozn. F_k ... dist fce Z_k

Chceme dokázat, že $P(Y=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, kdy $F_k(t) - F_{k+1}(t) =$

$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Dá se dokázat, že Z_k má hustotu $f_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^{k-1}$ pro $x > 0$

$(f_k(x) = 0$ pro $x \le 0)$

$$F_{k+1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{k+1}(x)\,dx = 0 \text{ pro } t \le 0$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda^{k+1}}{k!} e^{-\lambda x} x^k\,dx = \frac{1}{k!} \int_0^t (\lambda x)^k \cdot e^{-\lambda x} \cdot \lambda\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} y = \lambda x \\ dy = \lambda dx \\ t \to \lambda t \end{matrix} \right| = \frac{1}{k!} \int_0^{\lambda t} y^k e^{-y}\,dy = \left| \begin{matrix} u = y^k \to u' = k y^{k-1} \\ v' = e^{-y} \to v = -e^{-y} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{k!} \left[-y^k e^{-y}\right]_0^{\lambda t} - \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\int_0^{\lambda t} -k \cdot y^{k-1} e^{-y}\,dy}_{\int_0^{\lambda t} + \frac{k}{k!} y^{k-1} e^{-y}\,dy} =$$

$$\int \frac{1}{(k-1)!} \lambda^{k-1} x^{k-1} e^{-\lambda x} \lambda \, dx$$

$$= \frac{-1}{k!} (\lambda t)^k e^{-\lambda t} + \underbrace{\int_0^t \underbrace{\frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} dx}_{f_X(x)}}_{F_k(x)}$$

$$\Rightarrow F_k(t) - F_{k+1}(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

cbd