Souvislost rozdělení $Exp(\lambda)$ a $Po(\lambda t)$, resp. vlastnosti $Exp(\lambda)$, plynoucí z vlastnosti, že se jedná o modely situací s nezávislými událostmi

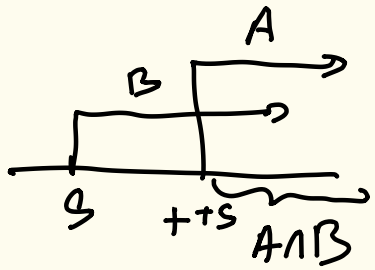
$X \sim Exp(\lambda)$ ... popisuje dobu čekání na událost, kde tyto události chodí nezávisle na sobě.

$$P(X > t+s \mid X > s) \overset{?}{=} P(X > t)$$

$$\hookrightarrow F(a) = P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a} \quad \text{pro } a > 0$$
$$= 0 \quad a \leq 0$$

$$\text{tj } P(\underbrace{X > t+s}_{A} \mid \underbrace{X > s}_{B}) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} = \frac{1 - P(X \leq t+s)}{1 - P(X \leq s)} =$$

$$= \frac{1 - F(t+s)}{1 - F(s)} = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t+s)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} =$$



$$= 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - F(t) =$$
$$= 1 - P(X \leq t) = P(X > t)$$

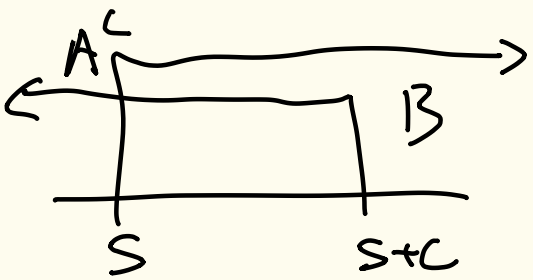
Máme dokázáno $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow X$ je „bez paměti". Platí také, že X je „bez paměti" $\Rightarrow X \sim Exp(\lambda)$?

X je „bez paměti", tj. $P(X > t+s \mid X > s) = P(X > t)$

$\left(P(A \mid B) = 1 - P(A^c \mid B) \Rightarrow\right) \quad 1 - P(\underbrace{X \leq t+s}_{A^c} \mid X > s) =$

$= 1 - P(X \le t)$

$P(X \le t+s \mid X > s) = P(X \le t)$

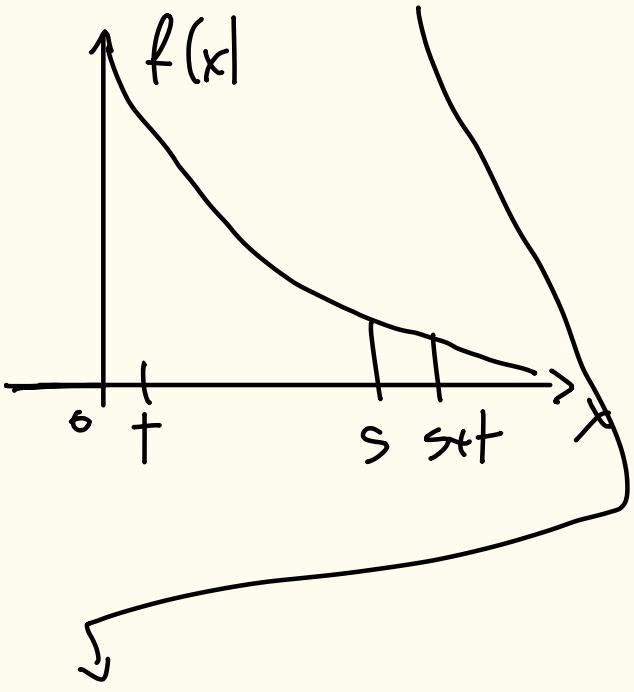


$$\frac{P(s < X \le t+s)}{P(X > s)} = P(X \le t)$$

$$P(A^c \mid B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{\int_s^{s+t} f(x)\,dx}{\int_0^2 f(x)\,dx} = \frac{P(s < X \le t+s)}{P(X \le t)} = P(X > s) =$$

$= 1 - P(X \le s) = 1 - F(s)$ a hodnota $t \to 0$



$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_s^{s+t} f(x)\,dx}{\int_0^x f(x)\,dx} = \frac{f(s)}{f(0)}$$

$$\frac{f(s)}{f(0)} = 1 - F(s)$$

$\underbrace{\frac{f(s)}{f(0)}}_{\to \text{konst}}$

$$\frac{1}{c} f'(s) = -F'(s) = -f(s)$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(s)}{f(s)} = -c = \int a$$

Diferenciální rovnice

$$\int \left(\ln |f(x)| \right)' = \int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \int a$$

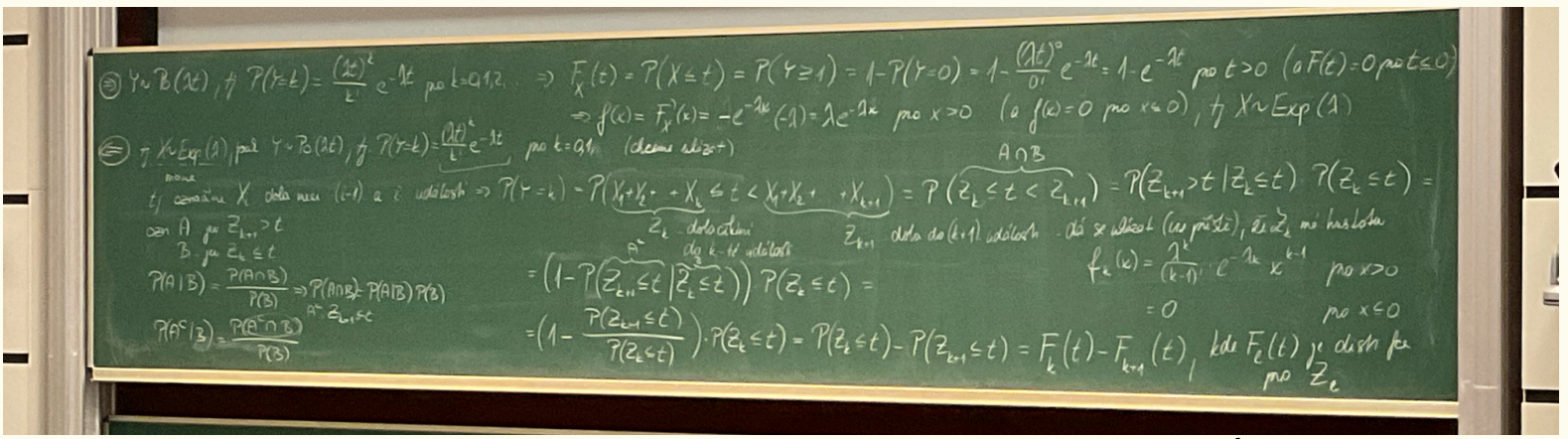
$$\ln f(x) = ax + c_1$$

$$f(x) = e^{ax + c_1} = c_2 \cdot e^{ax}$$

$$e^{ax} e^{c_1} \quad e^{c_1}$$

$$\Rightarrow c_2 = -a = c$$

$$\Rightarrow f(s) = c e^{-cs}$$



tj chceme ukázat $P(Y = k) = F_k(t) - F_{k+1}(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

$$F_{k+1}(t) = \int_0^t f_{k+1}(x)\,dx = \int_0^t \frac{\lambda^{k+1}}{k!} e^{-\lambda x} x^k\,dx =$$

$$= \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \cdot \int_0^t x^k e^{-\lambda x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^k & \to u' = k x^{k-1} \\ v' = e^{-\lambda x} & \to v = \dfrac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \left(\underbrace{\left[x^k \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]}_{\frac{t^k e^{-\lambda t}}{-\lambda}} + \int_0^t k x^{k-1} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right) =$$

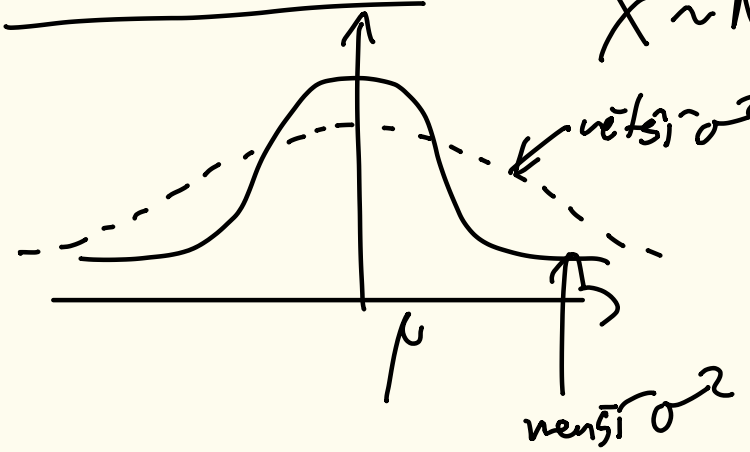
$$= \underbrace{\frac{\lambda^{k+1} t^k e^{-\lambda t}}{-\lambda k!}} = \underbrace{\int_0^t \frac{\lambda^{k+1} k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\lambda k!}\,dx}$$

$$= \frac{\lambda^k t^k e^{-\lambda t}}{k!} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \underbrace{\int_0^t \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}\,dx}_{F_k(t)} \qquad f_k(x)$$

$$F_{k+1}(t) = -\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} + F_k(t)$$

$$F_k(t) - F_{k+1}(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad \text{cbd}$$

Normální rozdělení



$$X \sim N(\underset{\underset{\mathbb{E}X}{\parallel}}{\mu}, \underset{\underset{\operatorname{var} X}{\parallel}}{\sigma^2})$$

$$X \to \mathbb{E}X, \operatorname{var} X \Rightarrow Z = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\operatorname{var} X}} \text{ má } \begin{array}{l} \mathbb{E}Z = 0 \\ \operatorname{var} Z = 1 \end{array}$$

Pokud navíc $X \sim \underline{N}(\mu, \sigma^2)$

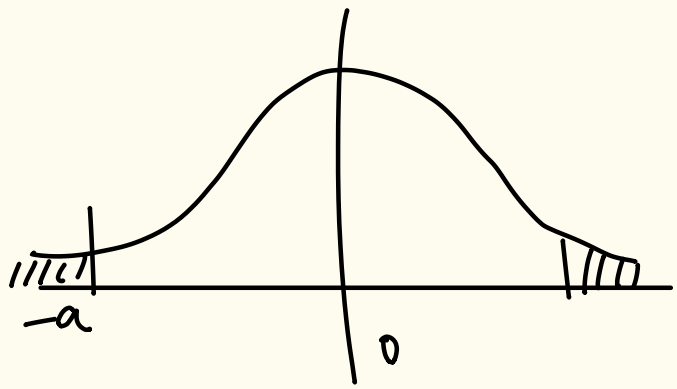
pak $Z \sim N(0,1)$

Př. Čas na třídění posloupnosti algoritmem A je [min]

n.v. $X \sim N(30, 25)$. Jaká je pst, že při náhodné vstupní posloupnosti bude program třídit alespoň 27 minut?

$$P(X \geq 27) = P\Big(\underbrace{\frac{X-30}{\sqrt{25}}}_{Z} \geq \underbrace{\frac{27-30}{\sqrt{25}}}_{-3/5}\Big) = P\left(Z \geq -\frac{3}{5}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z < -\frac{3}{5}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{3}{5}\right)$$



$$\phi(-a) = P(Z \le -a) = P(Z \ge a) = 1 - P(Z \le a) = 1 - \phi(a)$$

Odkud normující konstanta $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, resp $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$?

$$f(x) = c e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} c e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = ?$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\,dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ dx\,dy = \textcircled{r}\,dr\,d\alpha \end{array} \right| = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1}\, r\,dr\,d\alpha = (*)$$

Jakobián:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r$$

$$(*) = \left| \begin{array}{l} \frac{r^2}{2} = t \\ 2 \cdot \frac{1}{2} r\,dr = dt \\ r\,dr = dt \end{array} \right| = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt\,d\alpha = [\alpha]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x-\mu}{\sigma} = t \\ \frac{1}{\sigma} dx = dt \\ dx = \sigma\, dt \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}\, \sigma\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =$$

$$= \tilde{c}\, \sigma \sqrt{2\pi} = 1 \Rightarrow \tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$$

$$X - Y \to \mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}X - \mathbb{E}Y \Rightarrow Z = X - Y \text{ má } \mathbb{E}Z = \mu_1 - \mu_2$$

$$\operatorname{var}(X-Y) = \operatorname{var}(X + (-1)Y) = \operatorname{var}X + \operatorname{var}(-1)Y =$$

$$= \operatorname{var}X + (-1)^2 \operatorname{var}Y = \operatorname{var}X + \operatorname{var}Y \Rightarrow \operatorname{var}Z = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Př.

Uvažujme algoritmus A z předešlého příkladu a algoritmus B, který je dvoukrokový (kroky jsou vzájemně nezávislé), v němž doba 1. kroku n.v. $Y \sim N(10, 16)$ a doba 2. kroku je n.v. $U \sim N(23, 8)$. Určete pst, že algoritmus B bude na náhodných datech rychlejší než A

$$P(\underbrace{Y + U - X}_{V} < 0) = P(V < 0) = P\left(\frac{V-3}{\sqrt{49}} < \frac{0-3}{\sqrt{49}}\right) = P\left(Z < -\frac{3}{7}\right) = \Phi\left(-\frac{3}{7}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{7}\right) \doteq 1 - 0{,}67 = \underline{\underline{0{,}33}}$$

$\frac{3}{7} \doteq 0.43$

$$V \Rightarrow \mathbb{E}V = \mathbb{E}Y + \mathbb{E}U - \mathbb{E}X = 10 + 23 - 30 = 3$$

$$\operatorname{var} V = \operatorname{var} Y + \operatorname{var} U + \operatorname{var} X = 16 + 8 + 25 = 49$$

Př.

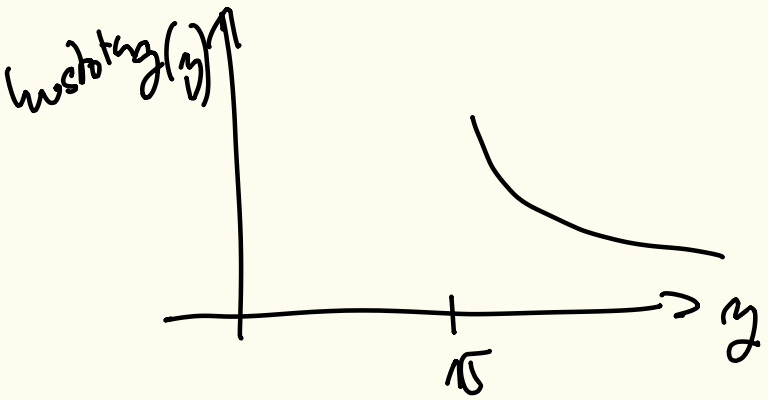
Př. Doba čekání [h] na telefonní objednávku je n.v. $X \sim Exp(6)$. Sekretářka chodí o 15 později. Určete rozdělení n.v. Y, které popisuje čas od ~~začátk~~ otevírací doby po vyřízení první telefonické objednávky v minutách

Víme: $X \sim Exp(6)$, tj. $F(x) = 1 - e^{-6x}$ pro $x > 0$, $= 0$ pro $x \leq 0$ & $Y = 15 + 60X \to$ ozn. distr. $G(y)$

Chceme: $G(y) = P(Y \leq y) = P(15 + 60X \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-15}{60}\right) =$

$$= F\left(\frac{y-15}{60}\right) = 1 - e^{-6\frac{y-15}{60}} = 1 - e^{-\frac{y-15}{10}} \quad \text{pro } y > 15$$

$$= 0 \quad \text{pro } y \leq 15$$


kwadratisch(y)
y
15