Centrální limitní věta

Počet šestek ve 120 hodech

CLV: $X = \sum_{i=1}^{120} X_i$, kde $X_i = 1$, pokud v i-tém hodu šestka padla

$X_i = 0$, — 1 / — nepadla

$\Big\} \Rightarrow X_i \sim Alt\left(\frac{1}{6}\right)$, tj. $EX_i = \mu = \frac{1}{6}$, $var X_i = \sigma^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

$$P\left(15 < \sum_{i=1}^{120} X_i < 25\right) = P\left(\frac{15 - 120 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{120 \cdot \frac{5}{36}}} \leq \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{120} X_i - 120 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{120 \cdot \frac{5}{36}}}}_{Z_{120} \sim N(0,1)} \leq \frac{25 - 120 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{120 \cdot \frac{5}{36}}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-5}{4} < Z_{120} < \underbrace{\frac{5}{4}}_{\approx 1{,}25}\right) = P(Z < 1{,}25) - P(Z \leq -1{,}25) \doteq$$

$$\doteq \Phi(1{,}25) - \underbrace{\Phi(-1{,}25)}_{1 - \Phi(1{,}25)} = 2\Phi(1{,}25) - 1 \simeq \underline{\underline{0{,}8}}$$

Rychlost konvergence je dána Berry-Esseenovou nerovností

Pro F_n dist. fci je $|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c \cdot \beta}{\sigma^3 \sqrt{n}}$ $\beta = E|X_i - EX_i|^3$

⋮

Př. Kolikrát musíme hodit mincí, aby byl podíl orlů od $\frac{1}{2}$ vzdálen o méně než 0,05 s pstí alespoň 0,99?

Čebyševova nerovnost: $P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}X}{\varepsilon^2}$ $= \frac{1}{4n}$ $= 0{,}01$ $\Rightarrow 10000$

podíl orlů: $\mathbb{E}X = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 0{,}05$, $\varepsilon^2 = 0{,}05^2$

$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, kde $X_i = 1$, padl orel, $-1/-0$ padla panna

CLV: $P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}05\right) \geq 0{,}99$

$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}\right| < 0{,}05n\right) \geq 0{,}99$

$n\mu = n\frac{1}{2}$, $n\sigma^2 =$ | $\mathbb{E}X_i = \frac{1}{2}$, $\text{var}X = \frac{1}{4}$

$P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}\right|}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} < \frac{0{,}05n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} = 0{,}1\sqrt{n}\right) \geq 0{,}99$

$|Z_n|$

$P(0{,}1\sqrt{n} < Z_n < 0{,}1\sqrt{n}) = \Phi(0{,}1\sqrt{n}) - \Phi(-0{,}1\sqrt{n}) =$

$= 2\Phi(0{,}1\sqrt{n}) - 1 \geq 0{,}99$ $\quad \Phi(0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}99$

$n \doteq 660$ $\leftarrow 0{,}1\sqrt{n} = 2{,}57$

Př. Plasmie přinášejí 1 žížalku / 4 dny.
Jaká je pst, že nám klubíce 25 žížalek vydrží alespoň 120 dní?

X_i ... doba [dny] mezi příchody $\sim Exp\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow$

$\mathbb{E}X_i = 4$

$\mathrm{var} X_i = 16$

pro $i = 1, \dots, 25$

$$P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i \geq 120\right) =$$

$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 25 \cdot 4}{\underbrace{\sqrt{25 \cdot 16}}_{Z}} \geq \frac{120 - 25 \cdot 4}{\sqrt{25 \cdot 16}}\right) = P(Z \geq 1) =$$

$$1 - P(Z \leq 1) =$$

$$= 1 - \Phi(1) \simeq \underline{0{,}16}$$

NEBO:

X ... počet plných žížal za 120 dní

$X = \sum_{i=1}^{120} X_i$, kde X_i je počet plných žížal / den

$X_i \sim Po\left(\frac{1}{4}\right)$ ... $X = \sum_{i=1}^{120} X_i$

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{120} \mathbb{E}X_i = \sum^{120} \frac{1}{4} = 30$$

$\mathrm{var} X = \sum^{120}$ rozptyly

$$30 = \sum^{120} \frac{1}{4}$$

$$P(X \leq 25) = P\left(\underbrace{\frac{X - 30}{\sqrt{30}}}_{Z} \leq \frac{25 - 30}{\sqrt{30}}\right) = P(Z \leq -0{,}913) =$$

$$= \Phi(-0{,}913) = 1 - \Phi(0{,}913) = 0{,}18$$