

Centrální limitní věta

Počet sestek ve 120 hodech

CLV: $X = \sum_{i=1}^{120} X_i$, kde $X_i = 1$, pokud je i-tému hodu sestka
podař

$$X_i = 0, -1, -$$

nepodař

$$\Rightarrow X_i \sim \text{AIF}\left(\frac{1}{6}\right), f_j, E[X_i] = \mu = \frac{1}{6}, \text{var}[X_i] = \sigma^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$$P(15 < \sum_{i=1}^{120} X_i < 25) = P\left(\frac{15 - 120 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{120 \cdot \frac{5}{36}}} < \frac{\sum_{i=1}^{120} X_i - 120 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{120 \cdot \frac{5}{36}}} < \frac{25 - 120 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{120 \cdot \frac{5}{36}}}\right)$$

$$Z_{120} \sim N(0,1)$$

$$= P\left(\frac{-5}{4} < Z_{120} < \left(\frac{5}{4}\right)\right) \approx 1,25 = P(Z < 1,25) - P(Z \leq -1,25) =$$

$$\frac{\phi(1,25) - \underbrace{\phi(-1,25)}_{1-\phi(1,25)}}{2} \approx 2\phi(1,25) - 1 \approx 0,8$$

Rychlosť konvergencie je dana Berry-Esseenovou větou

$$\text{Pro } F_n \text{ dist } Z_n \text{ je } |F_n(x) - \phi(x)| \leq \frac{C \cdot S}{\sigma \sqrt{n}} \quad S = E[|X_i - E[X_i]|^3]$$

:

Př. Kolikrát musíme hodit minci, aby byl počet orliků od $\frac{1}{2}$ vzdálen o méně než 0,05 → počet slesení 0,99?

$$\text{Českyze kora nerovnost: } P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n}$$

↓ ↓ ↑
 $\frac{1}{2}$ 0,05 $0,05^2$
 ↓ ↓ ↓
 = 0,01 ≈ 10000

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad \text{kde } X_i = 1, \text{ možnovel} \\ -1 - 0 \quad \text{pravd. pravd.}$$

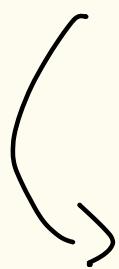
$$\text{CLV: } P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0,05\right) \geq 0,99$$

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}\right| < 0,05n\right) \geq 0,99$$

$$np = n \cdot \frac{1}{2} \\ n\sigma^2 =$$

$E[X_i] = \frac{1}{2}, \quad \sigma^2 X = \frac{1}{4}$

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}\right| < \frac{0,05n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} = 0,1\sqrt{n}\right) \geq 0,99$$



$$P(0,1\sqrt{n} < Z_n < 0,1\sqrt{n}) = \Phi(0,1\sqrt{n}) - \Phi(-0,1\sqrt{n}) =$$

$$= 2\Phi(0,1\sqrt{n}) - 1 \geq 0,99 \quad \Phi(0,1\sqrt{n}) = 0,99 \\ n \approx 660 \quad \leftarrow 0,1\sqrt{n} = 2,57$$

Pří. Představte průměr 1 žádoucího / 4 dny.

Jeden je psát, že nam krabice 25 žádoucích vydruží alespoň 120 dní?

$X_i \dots$ doba [dní] mezi přesunutím $\sim \text{Exp}\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow$

$$\mathbb{E}X_i = 4$$

$$\text{var } X_i = 16$$

pro $i=1, \dots, 25$

$$P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i \geq 120\right) =$$

$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 25 \cdot 4}{\sqrt{25 \cdot 16}} \geq \frac{120 - 25 \cdot 4}{\sqrt{25 \cdot 16}}\right) = P(Z \geq 1) =$$

$$1 - P(Z \leq 1) =$$

$$= 1 - \Phi(1) \approx \underline{0,16}$$

NEBO:

$X \dots$ počet přeslých žádoucích za 120 dní

$X = \sum_{i=1}^{120} X_i$, kde X_i je počet přeslých žádoucích / den

$$X_i \sim \text{Po}\left(\frac{1}{4}\right) \dots X = \sum_{i=1}^{120} X_i$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{120} \mathbb{E}X_i = \sum_{i=1}^{120} \frac{1}{4} = 30$$

$$\text{var } X = \sum_{i=1}^{120} \text{var } X_i$$

$$30 = \sum_{i=1}^{120} \frac{1}{4}$$

$$P(X \leq 25) = P\left(\frac{X - 30}{\sqrt{30}} \leq \frac{25 - 30}{\sqrt{30}}\right) = P(Z \leq -0,913) =$$

$$= \phi(-0,913) = 1 - \Phi(0,913) \approx 0,18$$