Připomenutí: Náh. výběr $(X_1, X_2, \dots, X_n) \to$ realizace náh. výběru (data, pozorování): $(x_1, x_2, \dots, x_n) \to$ známých dělá me výpočty

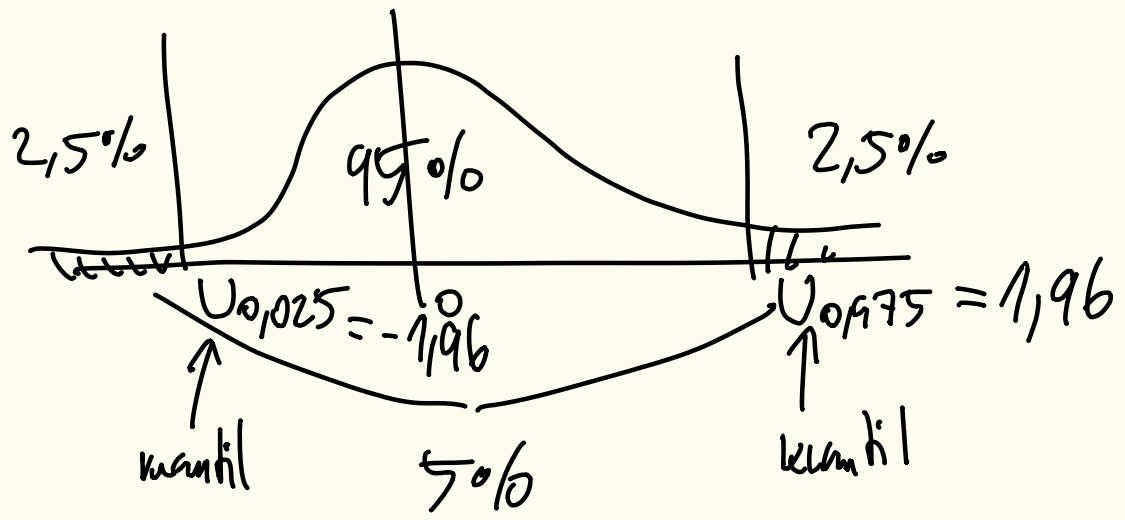
ale v teorii jsou operace náh veličiny, tj. odhady parametrů v praxi jsou náh. veličiny, jejichž skutečných hodnot jsou náh veličiny,

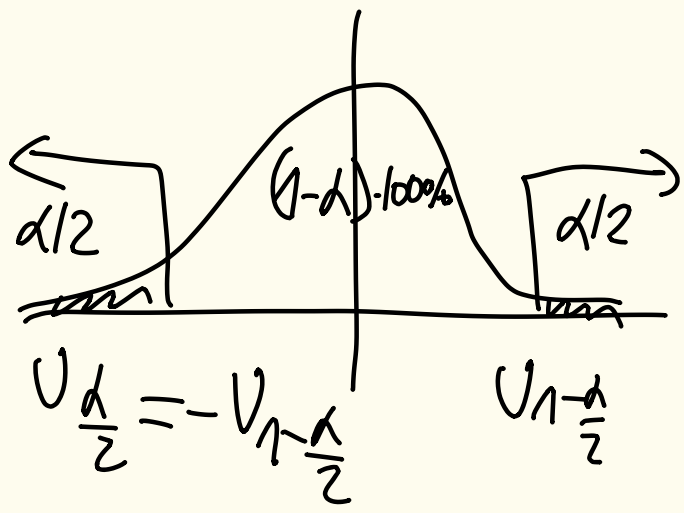
Metody odhadů parametrů: 1) intuitivní odhad (vizuální hranice kde $Ro(0,5)$)
2) metoda momentů
3) metoda max věrohodnosti

Př. $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2) \to \overline{X_n} = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\sim N(n\mu, n\sigma^2)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}\overline{X_n} = \mathbb{E}\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} \mathbb{E}\sum X_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu \\ \operatorname{var}\overline{X_n} = \operatorname{var}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n^2} \operatorname{var}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases} \overline{X_n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X_n} - \mu}{\underbrace{\sqrt{\sigma^2/n}}_{Z}} \sim N(0,1)$$





$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Rightarrow P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

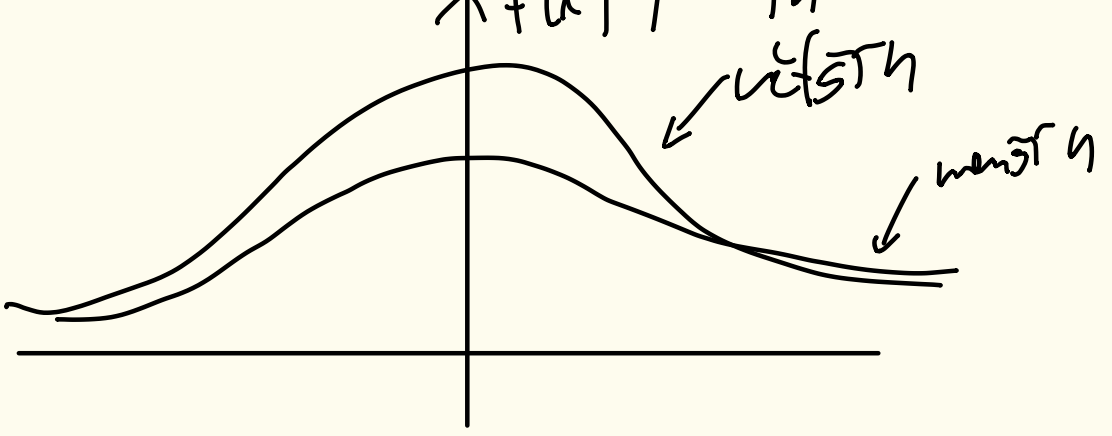
$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \overline{X_n} - \mu \le u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-\bar{X}_n + u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le -\mu \le -\bar{X}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}_n - u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \ge \mu \ge \bar{X}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \ge \mu \ge \bar{X}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$(1-\alpha)\,100\%\ CI = \left(\bar{X}_n \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

$\Rightarrow$ místo u_β používáme $t_{n-1,\beta}$

$\left(\beta = \frac{\alpha}{2}\ a\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)$, tj.

$$\chi(1-\alpha)\cdot 100\%\ CI \text{ pro } \mu: \left(\bar{X}_n \pm t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$$

Př. V jistém pivovaru dostává správce dotaci do lněsků ...
uleguje 12m
délky: 12,5 m, 11,2m, 11,5m, 12,5 m, 10,5 m, 12,1m, 11,2m, 10,5m, 11,5m

1) Sestrojte 95% CI pro střední hodnotu

$$\bar{X}_9 \to \bar{x}_9 = \frac{12{,}5 + \ldots + 11{,}5}{9} = 11{,}5$$

$$S_9^2 \to s_9^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x}_9)^2 = \frac{1}{8}\left[(12{,}5-11{,}5)^2 + \ldots + (11{,}5-11{,}5)^2\right] =$$

$$= 0{,}5675 \Rightarrow s_9 = \sqrt{s_9^2} = \underline{0{,}75}$$

$t_{8;0{,}975} \overset{\text{tabulky z tabulky}}{=} 2{,}31$

$\Rightarrow$ 95% CI pro $\mu = \left(11{,}5 \pm 2{,}31 \cdot \frac{0{,}75}{\sqrt{9}}\right) =$

$= (10{,}935;\ 12{,}065)$

CLV: $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mathbb{E}X_1}{\sqrt{n \cdot \mathrm{var} X_1}} \le a\right) \to \Phi(a) \Rightarrow P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}X_i}{\sqrt{n \cdot \mathrm{var} X_1}} \le\right.$

$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mathbb{E}X_1}{\sqrt{n \cdot \mathrm{var} X_1}} \sim Z \sim N(0,1)$, $n \to \infty$

$\left. \le u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right| \overset{\text{Sn}}{=} 1-\alpha$

$\vdots$

$P\left(\overline{X_n} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \ge \mathbb{E}X_1 \ge \overline{X_n} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) =$

$= 1-\alpha$

$\Rightarrow (1-\alpha) \cdot 100\%$ CI pro $\mathbb{E}X_1 = (\dots)$

Testování hypotéz

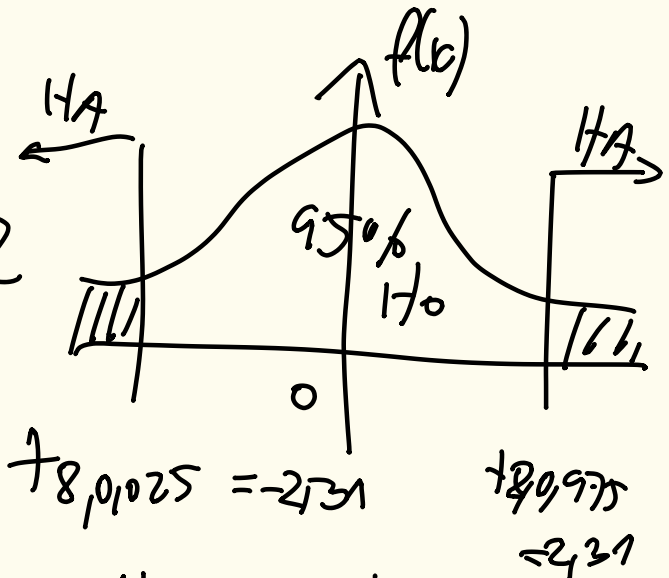
Př. Loď $\rightarrow \overline{x_9} = 11{,}5$; $S_9 = 0{,}75$

95% CI = (10,935; 12,065)

X ... délka náh. vybrané lodi

$H_0: \mathbb{E}X = 12$ $\quad T = \frac{\overline{X_n} - \mu}{S_n} \sqrt{n} \sim t_{n-1}$

$H_A: \mathbb{E}X \neq 12$ $\quad T_0 = \frac{11{,}5 - 12}{0{,}75} \cdot \sqrt{9} = -2$



H_0 nezamítáme ve prospěch H_A

$H_A: \mathbb{E}X \neq 12$ na $\alpha = 5\%$

Intervalový odhad parametru

Fce na náh výběru, která nám vytvoří interval, do něhož s pravd se zadanou pstí, např. asymptotický odhad pro

$\mathbb{E}X$ je $(1-\alpha)\cdot 100\%$ CI $= \left(\bar{x}_n \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_n}{\sqrt{n}}\right)$

→ Testování hypotéz: H_0: nějaké tvrzení, např $\mathbb{E}x = 5$

H_A: protitvrzení, např $\mathbb{E}x \neq 5$ nebo $\mathbb{E}x < 5$ nebo $\mathbb{E}x > 5$

α hladina testu „chyba, kterou si při provádění" chyba 1. druhu

vizyT