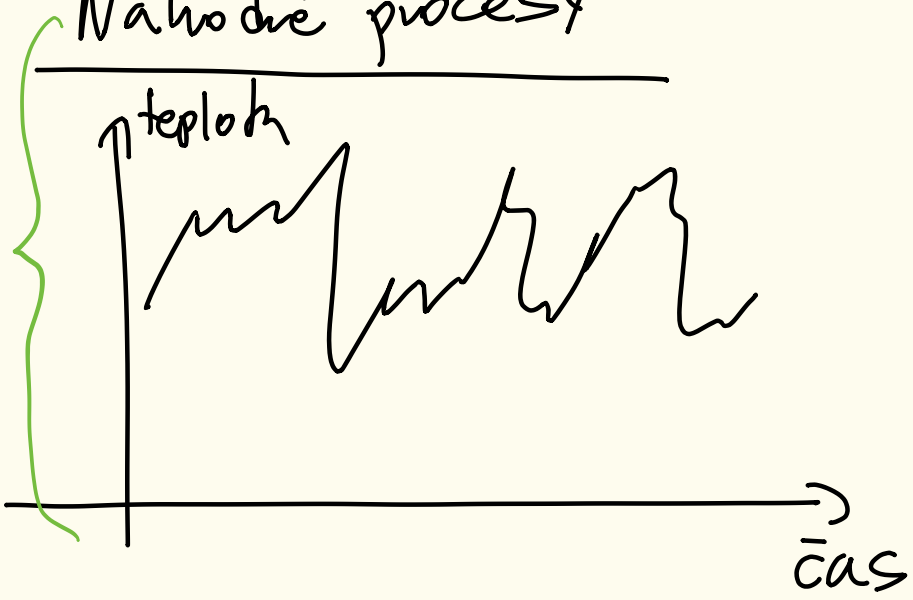
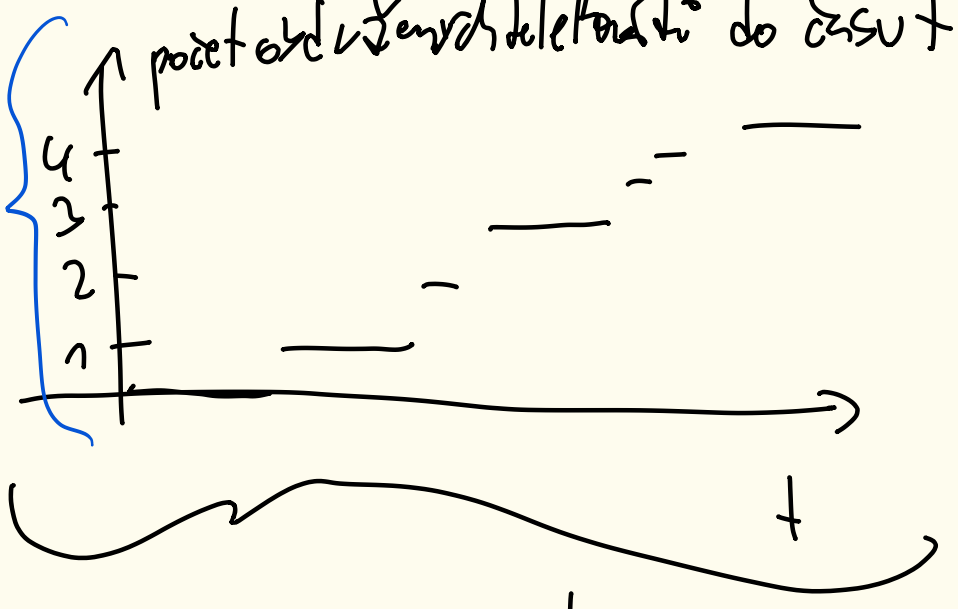
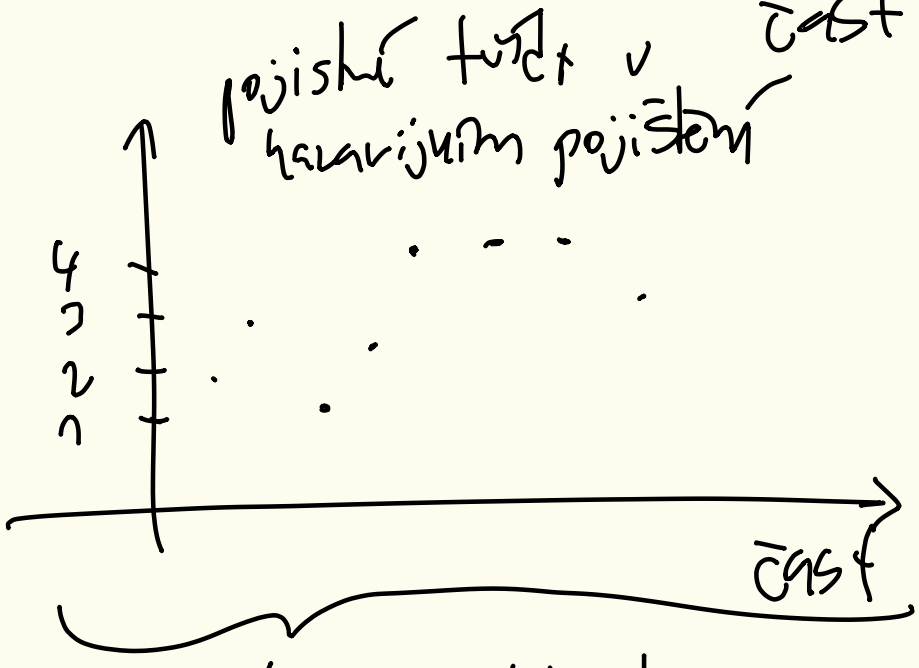
Náhodné procesy





náh. proces se spojitým časem

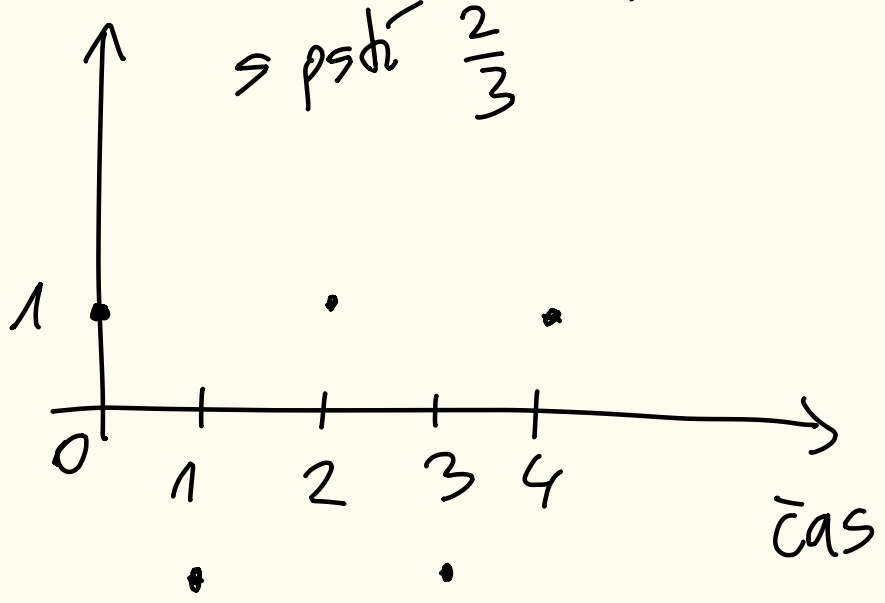


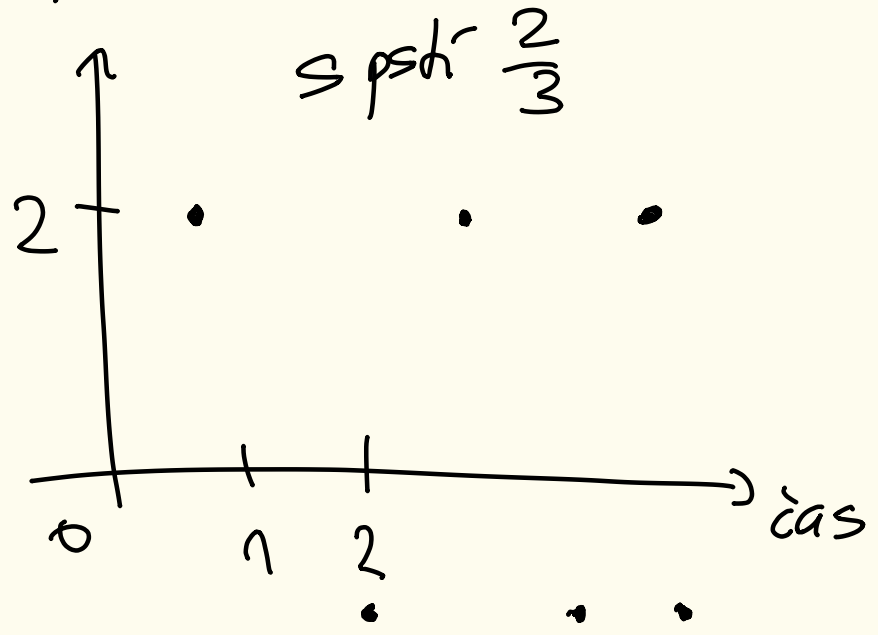
náh. čas s diskrétním časem

(*) náh. procesy se spojitými stavy

(*) -||- diskrétními -||-

Př. $X_t = (-1)^t X$, kde $P(X=1) = \frac{2}{3}$ a $P(X=-2) = \frac{1}{3}$





$R(t,s) = \mathbb{E}(X_t - \mathbb{E}X_t)(X_s - \mathbb{E}X_s) = \mathbb{E}X_t X_s - \mathbb{E}X_t \mathbb{E}X_s$

$\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}(-1)^t X = (-1)^t \mathbb{E}X = (-1)^t \cdot \left(1 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3}\right) = 0 = \mathbb{E}X_s$

$(*) = \mathbb{E}X_t X_s = \mathbb{E}(-1)^t X (-1)^s X = (-1)^{t+s} \cdot \mathbb{E}X^2 = 6$

$$= (-1)^{t+s} \cdot \left(1 \cdot \tfrac{2}{3} + (-2)^2 \cdot \tfrac{1}{3}\right) = 2(-1)^{t+s}$$

Pro $\forall h \in \mathbb{N}$: $R(t+h, s+h) = \mathbb{E}X_{t+h}X_{s+h} - \mathbb{E}X_{t+h} \cdot \mathbb{E}X_{s+h}$

$$= \mathbb{E}X_{t+h}X_{s+h} = \mathbb{E}\left((-1)^{t+h}X\left(-1\right)^{s+h}X\right) = \underbrace{(-1)^{t+h+s+h}}_{(-1)^{2h}(-1)^{t+s}} \underbrace{\mathbb{E}X^2}_{2} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{t+s} = R(t,s)$$

$\Rightarrow$ slabě stacionární

Př. $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených (tzv i.i.d.) náh. veličin. Je silně stac.?

$$P(X_{t_1} \le x_1, \dots, X_{t_n} \le x_n) \overset{\text{nezávislost}}{=}$$

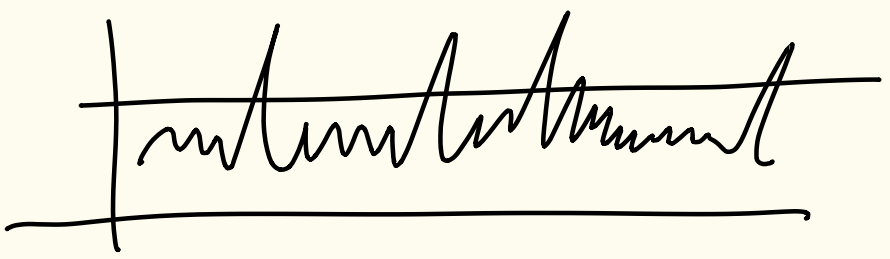
$$= P(X_{t_1} \le x_1) \cdot P(X_{t_2} \le x_2) \cdot \dots \cdot P(X_{t_n} \le x_n) \overset{\text{stejně rozd.}}{=}$$

$$= P(X_{t_1+h} \le x_1) \cdot P(X_{t_2+h} \le x_2) \cdot \dots \cdot P(X_{t_n+h} \le x_n) =$$

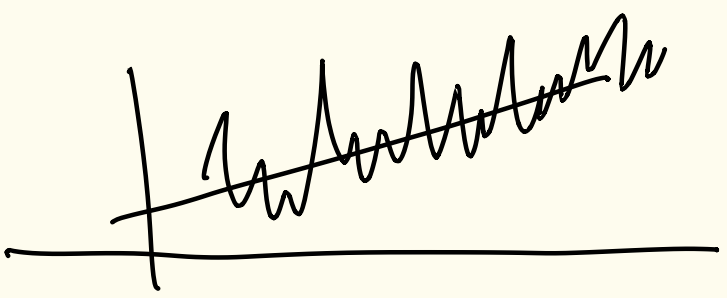
nezáv. $= P(X_{t_1+h} \le x_1, \dots, X_{t_n+h} \le x_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ silně stacionární

silně stac.



slabě stac.



Markovský řetězec s disk. časem $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) =$$

$$= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

X_{n+1} příští krok; X_n teď; X_0 minulost

Markovská vlastnost:

Budoucí vývoj závisí pouze na poslední známé hodnotě nikoliv na předešlém vývoji.

Př.: pojistný třídy

homogenní řetězec: $p_{ij} \to P = \{p_{ij}\}_{i,j \in S} \to$ matice pravděpodobností přechodu

Užití: 1) Pravděpodobnost konkrétních vývojů:

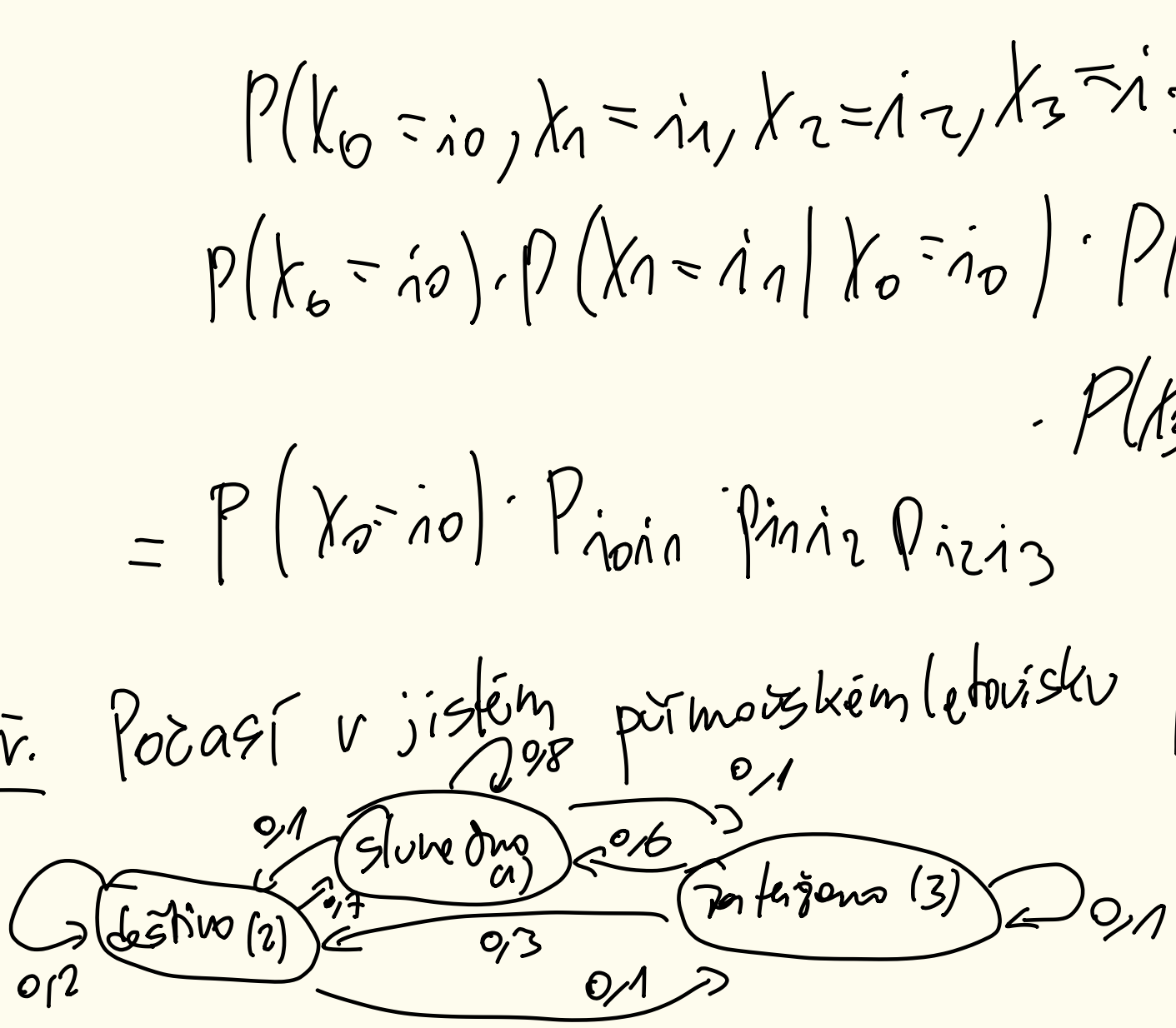
$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3) =$$

$$P(X_0 = i_0) \cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \cdot P(X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1, \cancel{X_0 = i_0}) \cdot$$

$$\cdot P(X_3 = i_3 \mid X_2 = i_2, \cancel{X_1 = i_1}, \cancel{X_0 = i_0})$$

$$= P(X_0 = i_0) \cdot p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3}$$

Př. Počasí v jistém přímořském letovisku



$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P(X_0=1, X_1=1, X_2=3, X_3=2) = P(X_0=1)\cdot p_{11}p_{13}p_{32}$$

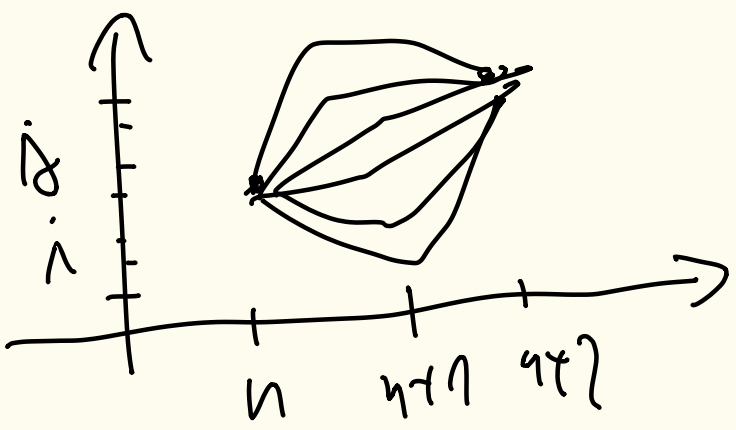
$$= P(X_0=1)\cdot p_{11}\cdot p_{13}\cdot p_{32}$$

0,8 0,1 0,1

$$= 1$$

(2) Získávání pstí příchodu vyšších uzlů:

$$P(X_{n+2}=j \mid X_n=i) = p_{ij}^{(2)} = \sum_{k\in S} p_{ik}p_{kj}$$



$$\sum a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$$

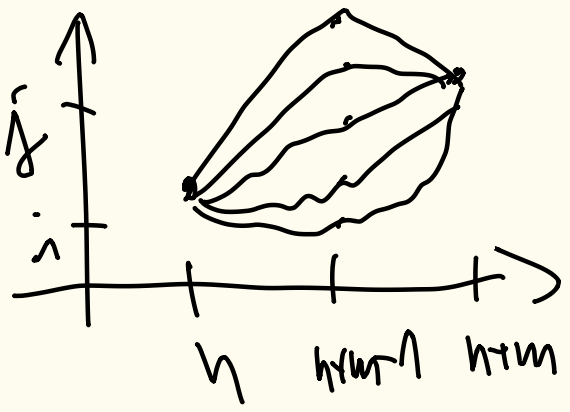
$C = AB$

$$A = \{a_{ij}\}$$

$$B = \{b_{ij}\}$$

$$C = \{c_{ij}\}$$

$$P^{(2)} = P\cdot P = P^2$$



$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m-1)}\cdot p_{kj} = P^{(m-1)}P = P^m$$

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}76 & 0{,}14 & 0{,}1 \\ 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Stac. rozdělení: Podíly (pstí) vyšších uzlových stavů, na nichž se náhm proces ustálí, tj.

$$\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{|S|}\}$$

$$\Pi_1 = \Pi_1\cdot p_{11} + \Pi_2\cdot p_{21} + \Pi_3 p_{31}$$

$$\Pi_2 = \Pi_1\cdot p_{12} + \Pi_2\cdot p_{22} + \Pi_3\cdot p_{32}$$

$$\Pi_3 = \Pi_1\cdot p_{13} + \Pi_2\cdot p_{23} + \Pi_3\cdot p_{33}$$

$$\Pi_1 = 0{,}8\Pi_1 + 0{,}7\Pi_2 + 0{,}6\Pi_3$$

$$\Pi_2 = 0{,}1\Pi_1 + 0{,}2\Pi_2 + 0{,}3\Pi_3$$

$$\Pi_3 = 0{,}1\Pi_1 + 0{,}1\Pi_2 + 0{,}1\Pi_3$$

$$0{,}1(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3) = (*)$$

$a(1 = \pi_3$ $\qquad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

$\vdots$

$\pi_2 = \frac{2}{15} = 0,1\overline{3}$

$\pi_1 = \frac{23}{30} = 0,7\overline{6}$

$\Rightarrow \pi = (0,7\overline{6}, 0,1\overline{3}, 0,1)$