Náh. procesy ... rodiny / systémy náh. veličin

$\{X_t, t \in T\}$ „vyvíjejících se" v čase $t \to T = (q, h)$

→ proc se spoj. časem

T ... spoj. množina

→ -||- diskr. čas

↳ náhodné hodnoty < z nespočetné množ → se spoj. časem
ze spočetné množ → s diskr. stavy

↓

Markovské řetězce s diskrétním časem

↳ budoucí vývoj závisí pouze na poslední známé hodnotě, nikoliv na minulosti, tj. $P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0)$

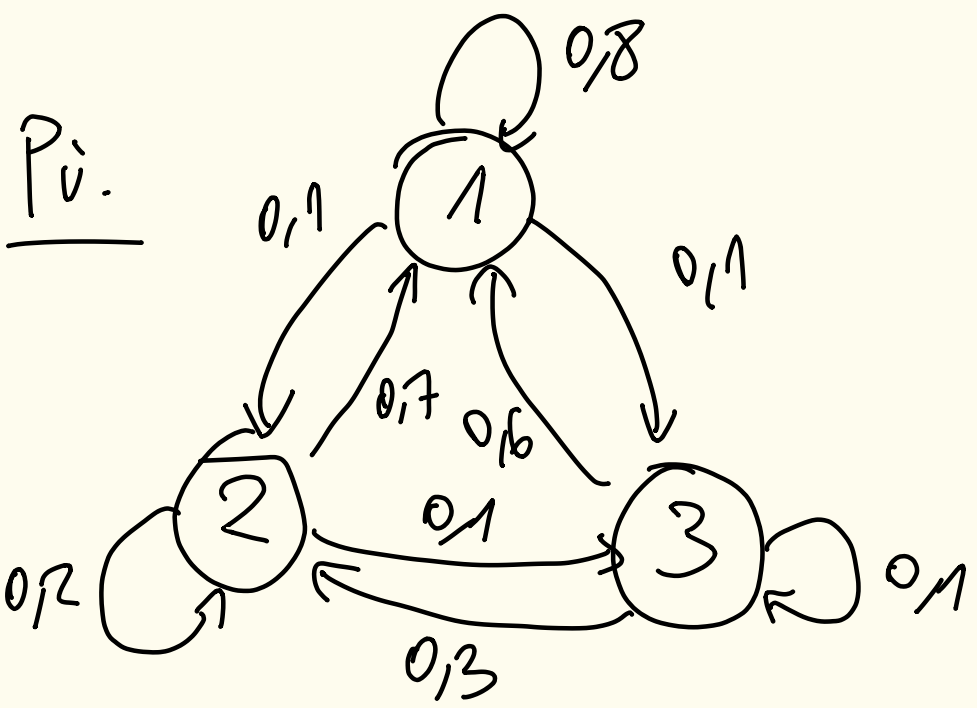
$= P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) =: p_{ij}$

↓

$P = \{p_{ij}\}_{i,j \in S}$

matice pstí přechodu

Př.



1 ... slunečno

2 ... deštivo

3 ... zataženo

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

stochastická matice
(součet hodnot v řádku vždy roven 1)

Užití: 1) při hledání dlouhodobých

$P(X_0=1, X_1=1, X_2=3, X_3=2) =$ ← věta o součinu pst

$= P(X_0=1)\, P(X_1=1 \mid X_0=1) \cdot P(X_2=3 \mid X_1=1, X_0=1)$ Markov

... viz LEC 18

$P(X_{n-2}=1, X_{n-1}=i, X_n=2)$ Jaký je nejpravděpodobnější
ve vstupu pro jaké i? registr?

$=$

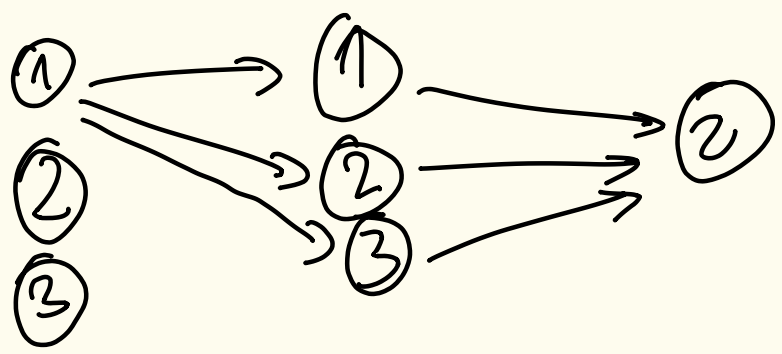
$\underbrace{P(X_{n-2}=1)}_{\text{couvání (konst)}} \cdot p_{1i} \cdot p_{i2} = L(i)$ věrohodnostní fce

$L(1) = C \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08C$ → max ⇒ nejpravděpodobnější bylo včera počasí 2

$L(2) = C \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02C$

$L(3) = C \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03C$

NEBO: Víme jen, že $X_n = 2$. Jaké bylo nejpravděpodobnější počasí před dvěma dny?



$L(i) = P(X_n=2 \mid X_{n-2}=i) \Rightarrow$

$\Rightarrow L(1) = \sum_k p_{1k}\, p_{k2} =$

$0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}3$

$L(2) = \sum_k p_{2k}\, p_{k2} = \ldots$

$L(3) = \sum_k p_{3k}\, p_{k2} = \ldots$

pro $\max L(i)$ nejpravděpodobnější stav

Nebo chceme 9.1.5

$$L(i) = P(X_{n-2}=i, X_n=2) = P(X_n=2 \mid X_{n-2}=i) \cdot P(X_{n-2}=i)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

100 → 1

80 + 70 + 60 → 1

2 ← 100

3 ← 100

10 + 20 + 30 → 2

10 + 10 + 10 → 3

$\begin{pmatrix} & 210 & \\ 60 & & 30 \end{pmatrix}$ →

168 + 42 + 18 = 228 → 1

→ 21 + 12 + 9 = 42 → 2

216 + 3 = 30 → 3

poč. stav $\underset{\tilde{\alpha}}{(100,100,100)} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \underset{\tilde{\beta}}{(210,60,30)}$

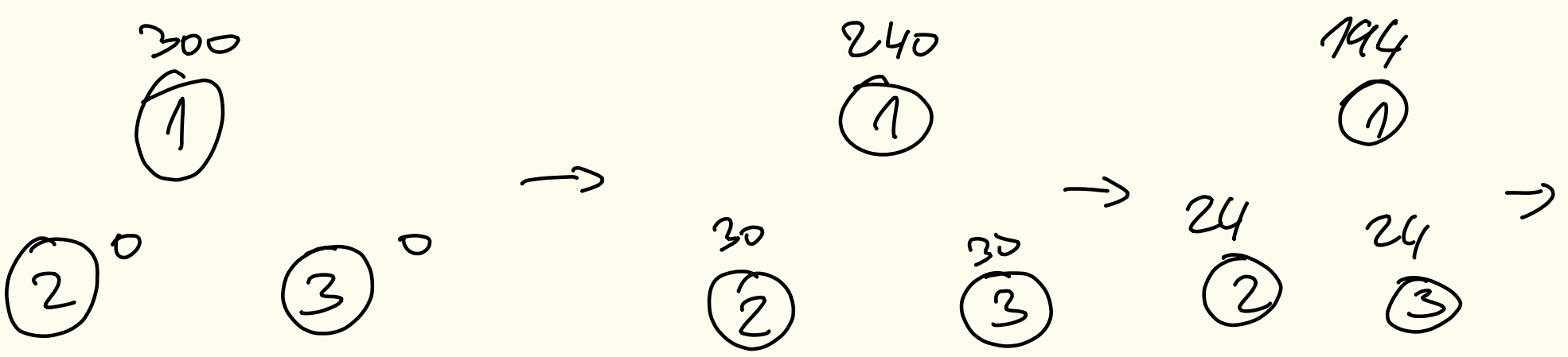
$\tilde{\beta} \cdot P = (228,42,30) = \tilde{\gamma}$

$\gamma \cdot P = \ldots \rightarrow \tilde{\pi} = (230,40,30$

$\tilde{\pi} \cdot P = (230,40,30) \cdot P = (230,40,30) \cdot \tilde{\pi}$

$\pi = \left(\frac{230}{300}, \frac{40}{300}, \frac{30}{300}\right)$

$= (0{,}7\bar{6}; 0{,}1\bar{3}, 0{,}1) \rightarrow$ stac. rozdělení



$$\Pi = \Pi P = \Pi P P \quad = \Pi P^n$$

$$\Pi \quad \Pi \quad \Pi$$

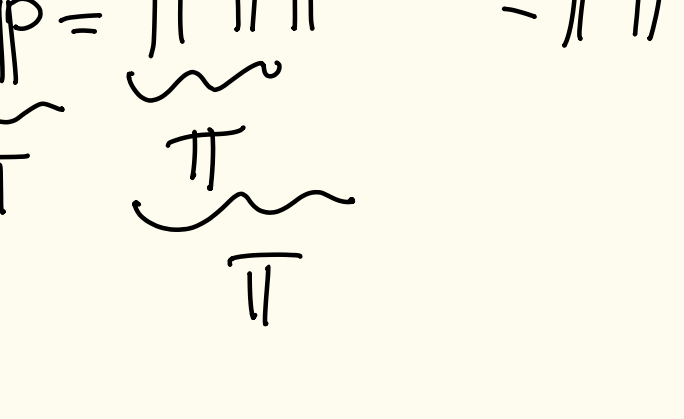
vždy 2)

Nyní značí $P^{(m)} = \{p_{ij}^{(m)}\}_{i,j \in S}$

kde $p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$

Chtěli jsme, že $P^{(m)} = P^m$

Př.



$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ stac vzít.

$$\Pi_1 = \Pi_3 + \Pi_4$$

$$\Pi_2 = \Pi_1$$

$$\Pi_3 = 1/2\,\Pi_2 = 1/2\,\Pi_1$$

$$\Pi_4 = 1/2\,\Pi_2 = 1/2\,\Pi_1$$

$$\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = 1$$

$$\pi_1 + \pi_1 + \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_1}{2} \Rightarrow 3\pi_1 = 1$$

$$\pi_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \pi_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{6} \Rightarrow \pi_4 = \frac{1}{6}$$

$$\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \rightarrow \text{stac. rozdělení}$$

všech 300 uvidí do 1

	1. kroh	2. kroh	3 kroh	4. kroh
1	300	0	0	300
2	0	300	150	0
3	0	0	150	0
4	0	0		

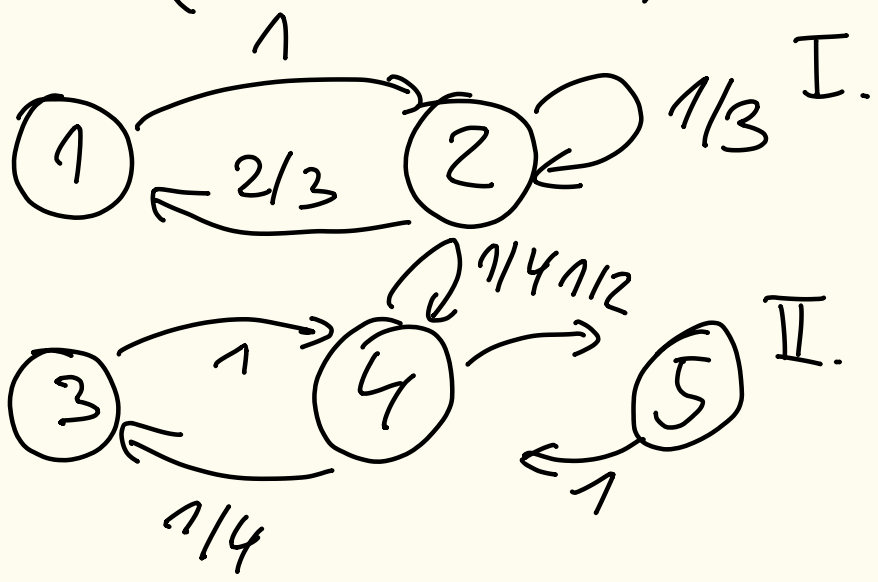
zacyklí se

200	100	100
100	200	100
70	50	50
30	50	50
	je ok	

ustálení na periodu = 3

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Př.



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I. $\Pi_1 = \frac{2}{3}\Pi_2$

$\Pi_2 = \Pi_1 + \frac{1}{3}\Pi_2$

$\Pi_1 + \Pi_2 = 1$

$\Rightarrow \Pi_1 = \frac{2}{5}\ \Pi_2 = \frac{3}{5}$

pohud lidi chy buď v 1 a 2

II. $\Pi_3 = \frac{1}{4}\Pi_4$

$\Pi_4 = \Pi_3 + \frac{1}{4}\Pi_4 + \Pi_5$

$\Pi_5 = \frac{1}{2}\Pi_4$

$\Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5 = 1$

$\Pi_3 \ \frac{1}{7}\ \Pi_4 = \frac{4}{7}\ \Pi_5 2$

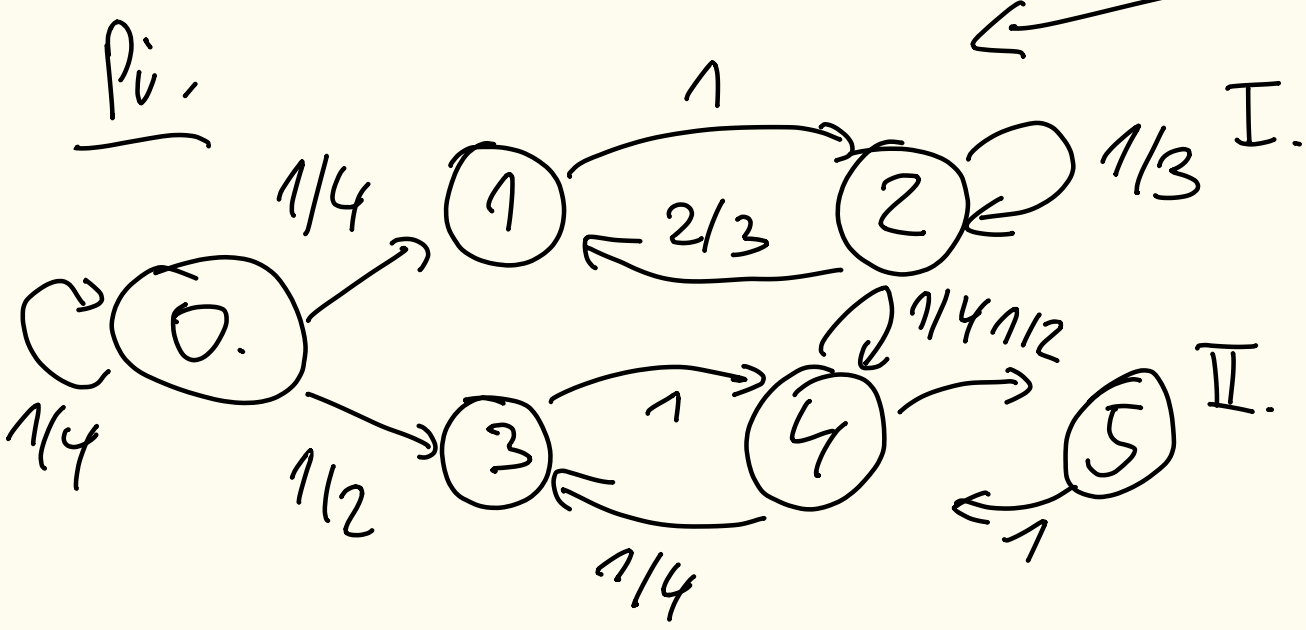
$\frac{1}{7}\ \ \frac{4}{7}\ \ \frac{2}{7}$

pohud jsem v 3, 4, 5

$C\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0, 0\right) + (1-C)\left(0, 0, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right) = \Pi \ldots$

... stac. rozdělení pro M. ř.

Př.



pohud už se rozdělují uvnitř (nezkl. se v 0.)

$\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5) = (0, \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}, \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}, \ldots)$

$P(\gamma_0 = \infty) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot(\ldots)\right) > 0 \Rightarrow$ nulový stav