Náhodný pokus → $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ množina el. jevů

$\mathcal{A}$ ... množina (obsahuje všech) podmnožin Ω

$\mathcal{A} = \{A, B, C \dots\}$

jevy

$A \cap B$ ... A a B nastanou zároveň

$A \cup B$ ... nastane A nebo B

$A - B$ ... nastane A, ale B nenastane

$A \cap B = \emptyset$ ... A a B jsou disjunktní

$P: \mathcal{A} \to \mathbb{R} \to \langle 0, 1 \rangle$ splňující ...

Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Př. 1. klasický $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$

$\forall i = 1, \dots, n \to P(A) = \frac{\#\omega_i \text{ vyhovují } A}{n}$

2. geometrický (spojitý) Ω ... nespočetná, ω_i reprezentovány body v $\mathbb{R}^d \to P(A) =$ poměr délek / ploch / objemů

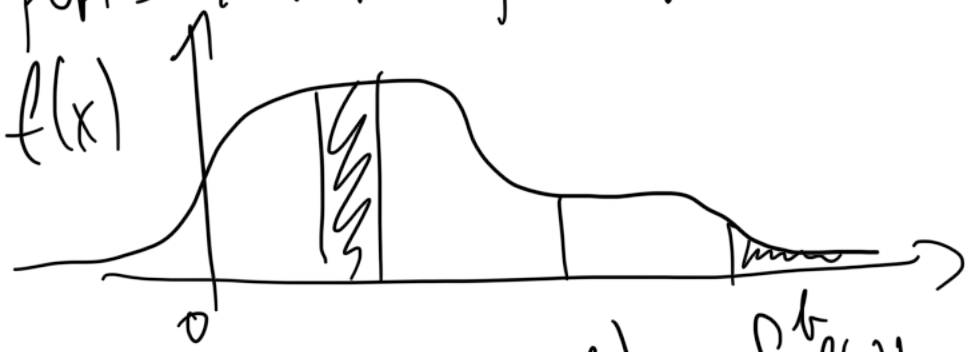
3. obecný diskrétní $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$,

$P(w_i)$ jsou různé pro různé w_i →

→ $P(A) = \sum_i P(w_i : w_i \text{ vyhovují } A)$

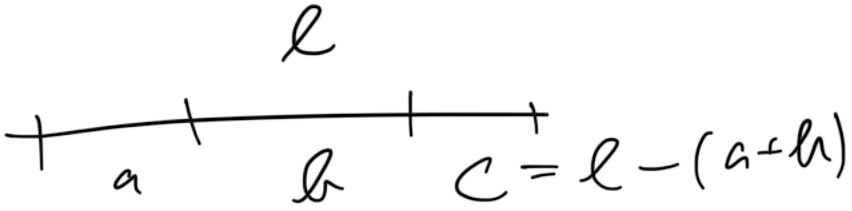
h. obecný spojitý: kombinace 2 a 3

→ popis hustotou pravděpodobnosti

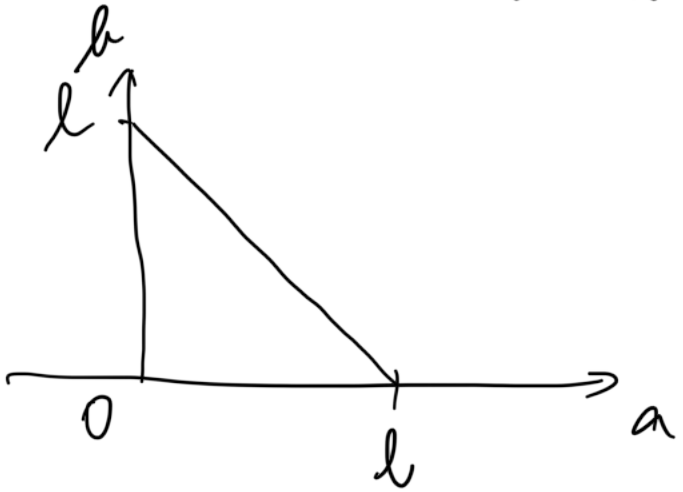


$P(a < \text{náh. číslo} < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Př. máme úsečku délky ℓ, kterou náhodně rozdělíme na 3 části. Pst, že z těchto částí můžeme sestrojit $\triangle$?



$$\Omega = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \; a+b < \ell \}$$
$$a>0 \quad b>0$$



$$A = \{(a,b) \in \Omega \;\; a+b > \ell-(a+b) \;\; \& \;\; a+\ell-(a+b) > b$$
$$\& \;\; b+\ell-(a+b) > a \}$$

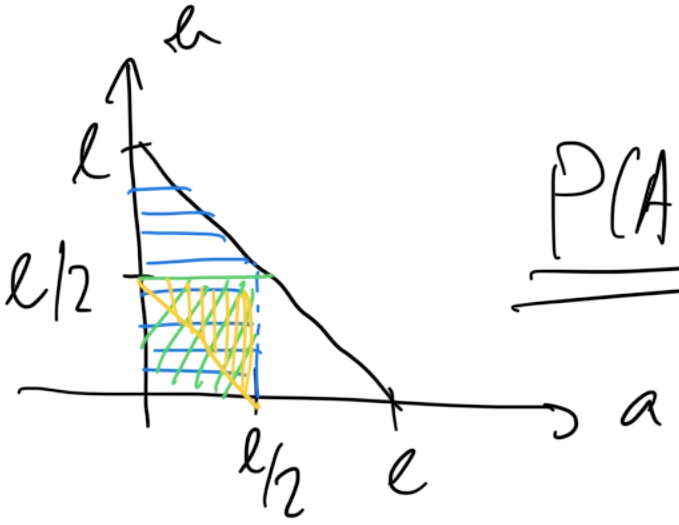
$$\Downarrow$$

$$2(a+b) > \ell$$
$$a+b > \ell/2$$
$$b > \frac{\ell}{2} - a$$

$$\ell - b > b$$
$$\ell > 2b$$
$$\ell/2 > b$$

$$\ell - a > a$$
$$\ell/2 > a$$

$$\Downarrow$$

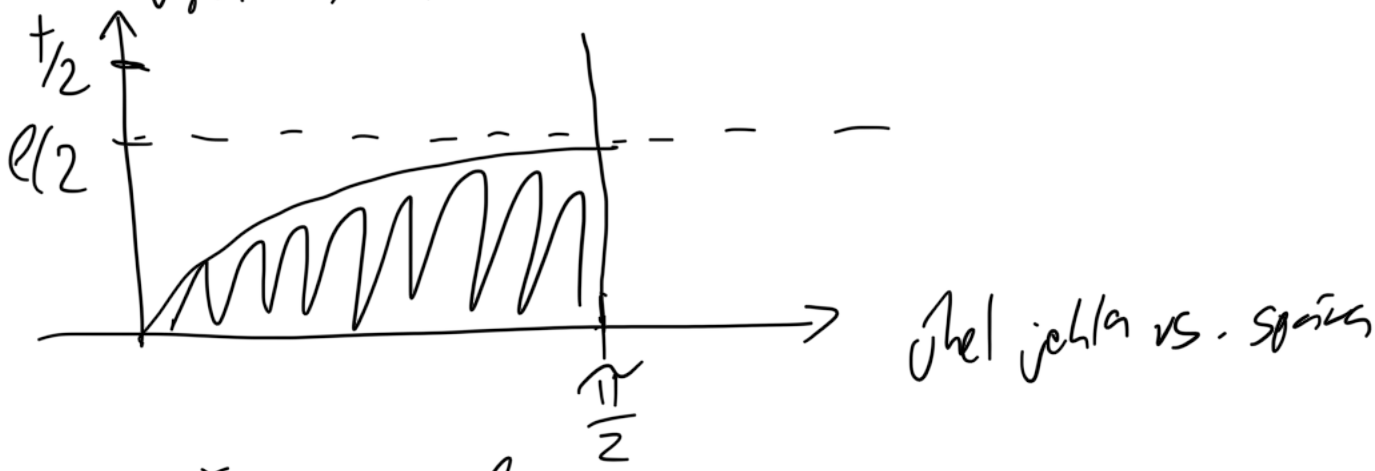


$$P(A) = 1/4$$

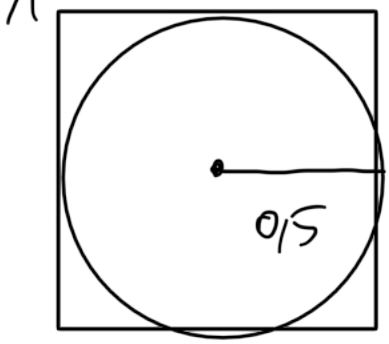
Př. Buffonova jehla

jehla o délce l, dlaždice šířky $t \geq l$, jehlu kážeme na dlaždice náhodně. Pst, že jehla protne hranici mezi dlaždicemi?

vzdálenost středu jehly od spáry x



$$\sin\alpha = \frac{x}{\frac{l}{2}} \Rightarrow \frac{l}{2}\sin\alpha = x$$



$S_0 = \pi \cdot 0{,}5^2 = \frac{1}{4}\pi$

$S_D = 1 \qquad P(\text{bod v } O) = \frac{\pi}{4}$

$\pi = 4 \cdot P(\text{bod v kruhu})$

↳ lze odhadnout π

Př. hazíme kostkou $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$

ω_1 ω_3 ω_5 A ... padla jedna čtyřka

ω_2 ω_4 ω_6 B ... padlo liché číslo

C: padly nejv 4 puntíky

$P(A) = 1/6$

$P(C) = 2/3$

$P(A|B) = 1/3$

$P(C|B) = 2/3$

← podmíněná pravděpodobnost A se znalostí B

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

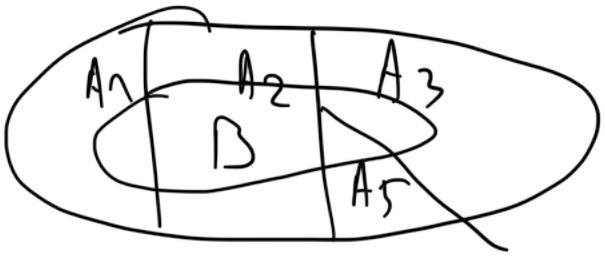
$$\Downarrow$$

$$P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$$

---

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq 0$ $\quad \geq 0$ $\quad$ Dk ze skrjtu 10

b) $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$



$$P\left(\bigcup_i A_i \,\middle|\, B\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_i A_i\right)\cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_i (A_i\cap B)\right)}{P(B)} = \sum_i \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}$$

$P(A_i|B)$

Př. V krabici máme 4 černé a 4 bílé kuličky.

V každém tahu vytáhneme kuličku, kterou do krabice nevrátíme.

Pst, že v každém tahu vybereme 1 černou a 1 bílou kuličku.

A_1 v 1 tahu vytáhli 1 č & 1 B

A_2 ve 2. — " —

A_3 ve 3. — " —

A_4 ve 4. — " —

$\binom{n}{k}$ počet k-tic z n prvků $= \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \underbrace{\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}}}_{P(A_1)} \cdot \underbrace{\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}}}_{P(A_2|A_1)} \cdot \underbrace{\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}}_{P(A_3|A_1 \cap A_2)} \cdot \underbrace{1}_{P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$$

Dk: $P(\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}_{B} \cap \underbrace{A_n}_{A}) =$

$= P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot$

$\cdot P(\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}}_{B} \cap \underbrace{A_{n-1}}_{A}) =$

$= P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \cdot$

$\cdot P(\underbrace{A_1 \cap \dots \cap A_{n-3}}_{B} \cap \underbrace{A_{n-2}}_{A}) \dots$

postupně opakujeme