Charakteristiky náhodných veličin

N. v. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ — diskrétní → popis $P(X=k) = \dots$; spojité, směsi → popis

v obou případech lze použít dříve uvedené charakteristiky (při výpočtu charakteristik není nutné předchozí)

1) Střední hodnota n.v. X („teoretický aritmetický průměr"):

a) $\mathbb{E}X = \sum k P(X=k)$ (k nabývané hodnoty)

b) $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

ad a) X ... počet panáků na hostině → $\mathbb{E}X = 3{,}7$

Y ... počet šestek v jednom hodu kostkou → $\mathbb{E}X = 1/6$

ad b) Z ... doba odbavení autobusu s 10 mil. zdravých

V ... doba odbavení na Zahradním městě

S. j. = dovo ještě, tj s pstr

Př. V krabici máme krychličky s délkou hrany 2 cm a 5 cm, přičemž těch menších je 2x víc než větších.

Označ. X délka hrany náhodně vybrané krychličky (tj. $P(X=2)=2/3$, $P(X=5)=1/3$). Spočtěte střední hodnotu náhodné veličiny Y popisující objem náhodně vybrané krychličky.

$$\mathbb{E}Y = 8\cdot\frac{2}{3} + 125\cdot\frac{1}{3} = \frac{16+125}{3} = \frac{141}{3} = 47$$

(vysvětlení: $Y = X^3$ a $\mathbb{E}Y = 2^3\cdot\frac{2}{3} + 5^3\cdot\frac{1}{3} = \sum_k k^3 P(X=k)$ k nabývané hodnoty X)

$\mathbb{E}|X-\mathbb{E}X|$

Pozn. $\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X) = \mathbb{E}X - \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}X}_{\text{konst. a}}) = \mathbb{E}X - \mathbb{E}X = 0$

proto zavádíme n-tou mocninu, to speciálně druhou:

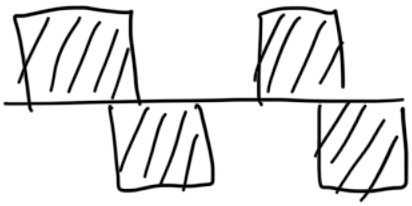
2.) Rozptyl n.v. X: $\operatorname{var}X = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2$ (DX)

a směrodatná odchylka $\operatorname{sd}X = \sqrt{\operatorname{var}X}$

$$\mathbb{E}\left(X^2 - 2X\,\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2X\cdot\mathbb{E}X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}X)^2 =$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}X\,\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

$\mathbb{E}X\,\mathbb{E}X = (\mathbb{E}X)^2$



⑤ $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}\,\frac{X-\mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{var}X}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}X}}\cdot\underbrace{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)}_{0} = 0$

$\mathbb{E}X - \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}X)}_{\mathbb{E}X}$ a $\mathrm{var}\,Z = \mathrm{var}\,\frac{X-\mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{var}X}} \overset{③}{=} \frac{1}{\mathrm{var}X}\cdot\mathrm{var}(X-\mathbb{E}X)$

$\overset{④}{=} \frac{1}{\mathrm{var}X}\cdot\mathrm{var}X = 1$

Př. X počet puntíků na kostce $(\mathbb{E}X = 3{,}5)$

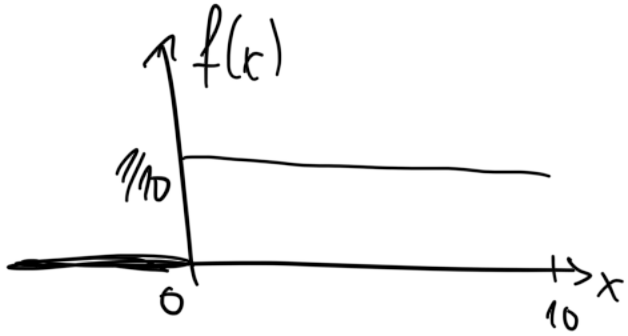
$$\mathrm{var}\,X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} =$$

$$= \frac{35}{12}$$

$\mathbb{E}X^2 = 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + \ldots + 6^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$

Z ... doba odbavení na bus $(\mathbb{E}Z = 5)$

$\mathrm{var}\,Z = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}Z)^2$



$$\mathbb{E}(Z)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \underbrace{\int_{\infty}^{0} x^2 \cdot 0\,dx}_{0} + \int_{0}^{10} x^2 \cdot \frac{1}{10}\,dx + \underbrace{\int_{10}^{\infty} x^2 \cdot 0\,dx}_{0} =$$

$$= 1/10 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = 1/10 \cdot \frac{1000}{3} = 100/3$$

X ... venkovní teplota (°C)

Y ... počet prodaných zmrzlin ve stánku za den

Z ... slunečných

→ předp. $\mathbb{E}X = 10$

$\mathbb{E}Y = 50$ $\mathbb{E}Z = 60$

$\mathbb{E}X$=teplo $X > \mathbb{E}X \Rightarrow X - \mathbb{E}X > 0$ a $Y > \mathbb{E}Y \Rightarrow Y - \mathbb{E}Y > 0$

$\mathbb{E}Y$=zima $X < \mathbb{E}X \Rightarrow X - \mathbb{E}X < 0$ a $Y < \mathbb{E}Y \Rightarrow Y - \mathbb{E}Y < 0$

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) > 0$$

$\mathbb{E}Z = 60$

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Z - \mathbb{E}Z) < 0$$