OPAKOVÁNÍ Základní modely pro náhodnou veličinu I Diskrétní n.v.

0) $X \sim Dirac(a)$, tj. $P(X=a)=1$

1) $X \sim Alt(p)$, tj. $P(X=1)=p$ a $P(X=0)=1-p$; $EX=p$, $\operatorname{var} X=p(1-p)$, užití: modelování/popis situace úspěch (1) vs. neúspěch (0)

2) $X \sim Binom(n,p)$, tj. $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pro $k=0,1,\dots,n$; $EX=np$, $\operatorname{var} X=np(1-p)$, užití: popis počtu úspěchů v n nezávislých pokusech, pst úspěchu v každém pokusu $=p$

$\sum_{i=1}^{n} P(X=i)$ složitý výpočet, rozlož se: uvědomit $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$, kde $X_i=1$, pokud v i-tém pokusu úspěch, $=0$, pokud i-tém pokusu neúspěch

3) $X \sim Po(\lambda)$
4) $X \sim Geom(p)$
5) $X \sim Hypergeom(N,K,n)$

} dnes

Pozn. Modelů je více, ale tyto jsou nejčastější

II Spojité n.v. 1) $X \sim Ro(a,b)$ 2) $X \sim Exp(\lambda)$ 3) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ } příště (možná kousek dnes)

---

odl I 5) Pí Pojišťovna má n smluv, v každé smlouvě dojde k pojistné události (tj. pravidelně pojišťovaný platí tou pojišťovnou) s pstí p

X - počet pojistných událostí za rok, tj. $X \sim Binom(n,p)$, tj. $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Pak $P(X=k) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \dfrac{n^k}{n^k} \cdot p^k (1-p)^n (1-p)^{-k}$

$\xrightarrow[p\to 0]{n\to\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$p \to 0$, $(1-p)^n = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}$, $(1-p)^{-k} \to 1$, $p^k n^k = \lambda^k$

pro $k=0,1,\dots$

Tj. $X \sim Po(\lambda)$, tj. $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $EX=\lambda$, $\operatorname{var} X=\lambda$

Formálně výpočet $EX = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda \lambda^{k-1}}{k(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \left| \begin{matrix} i=k-1 \\ \infty \end{matrix} \right| =$

$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda$

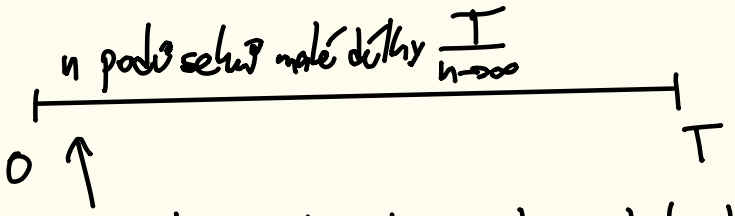
Je skutečně $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1$? Je pravda že $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = 1$

$\operatorname{var} = EX^2 - (EX)^2 = \underbrace{EX^2 - EX}_{} + EX + EX - (EX)^2$

$$\mathbb{E}(X^2 - X) = \mathbb{E}X(X-1) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

I 3) $X \sim Po(\lambda)$, tj. $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ pro $k = 0, 1, 2 \ldots$, $\mathbb{E}X = \lambda$, užití



v každém podúseku nastane událost s pstí $p \to 0$

$$X \sim Binom(n, p) \xrightarrow[p \to 0]{n \to \infty} X \sim Po(\lambda)$$

↳ počet událostí v časovém úseku $(0, T\rangle$

užití: počet událostí za daný časový úsek, na dané ploše, ve zvoleném prostoru

Př. Během pracovního týdne prasknou v budově přívěsné 2 žárovky. Jaká je pst, že od pondělka do středy: a) prasknou 3 žárovky
b) prasknou alespoň 1 žárovka s výjimkou to v úterý

X ..... počet prasklých žárovek od pondělí do středy

$X \sim Po\left(\frac{6}{5} = 1{,}2\right)$, tj $P(X=k) = \frac{1{,}2^k}{k!} e^{-1{,}2}$ pro $k = 0, 1, 2$

a) $P(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1{,}2^k}{k!} e^{-1{,}2} = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) =$

$= 1 - e^{-1{,}2}\left(\frac{1{,}2^0}{0!} + \frac{1{,}2^1}{1!} + \frac{1{,}2^2}{2!}\right)$

b) Y počet prasklých žárovek za pondělí + středa $\Rightarrow$

$Y \sim Po\left(\frac{4}{5} = 0{,}8\right)$, tj $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \frac{0{,}8^0}{0!} e^{-0{,}8}$

tj $P(Y=k) = \frac{0{,}8^k}{k!} e^{-0{,}8}$ pro $k = 0,1,2\ldots$

Z ... počet prvních závodů za sebou $\Rightarrow Z \sim Po(2/5 = 0{,}4)$,

tj $P(Z=k) = \frac{0{,}4^k}{k!} e^{-0{,}4}$ pro $k = 0,1,2 \Rightarrow P(Z=0) =$

$\frac{0{,}4^0}{0!} e^{-0{,}4} = e^{-0{,}4}$

$P(Y \geq 1 \cap Z = 0) = P(Y \geq 1)\, P(Z=0) = (1 - e^{-0{,}8}) \cdot e^{-0{,}4}$

$P(X \geq 1 \cap Z = 0) \neq P(X \geq 1) \cdot P(Z=0)$

I. 4 Př Jaká je pst, že při opakovaném házení kostkou padne šestka nejpozději v sedmém hodu

X ..... počet nešestek před první šestkou

$P(X=0) = 1/6$

$P(X=1) = 5/6 \cdot 1/6$

$P(X=2) = (5/6)^2 \cdot 1/6$

$\vdots$

$P(X=k) = (5/6)^k \cdot 1/6$

$P(X=k) = (5/6)^k \cdot 1/6 =: X \sim Geom$

pro $k = 1,2,\ldots$

Je $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$? Odvoďme obecně $\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k =$

$= p\,\frac{1}{1-p(1-p)} = p\,\frac{1}{p} = 1$ ✓

$1-p=q$, kde $|q|<1$ a $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

$$P(X\le 6) = \sum_{k=0}^{6} P(X=k) = \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{6}\,\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^7}{1-\frac{5}{6}} = \underline{\underline{1-\left(\frac{1}{6}\right)^7}}$$

NEBO JINAK Y: počet šestek v prvních sedmi hodech