Příklad 1: *Házíme dvěma kostkami. Stanovte pravděpodobnost jevu, že na kostkách padne součet menší než 5.*

Příklad 2: *V balíčku máme 32 karet, z toho 4 esa. Dvakrát za sebou vytáhneme náhodně jednu kartu. Stanovte pravděpodobnost jevu "alespoň jedna z vytažených karet je eso", jestliže po prvním tahu kartu a) vrátíme, b) nevrátíme zpět do balíčku.*

Příklad 3: *Cyril bude hrát s Adamem a Bohdanem tenis. Bude hrát tři sety. Může si vybrat pořadí protihráčů Adam - Bohdan - Adam nebo Bohdan - Adam - Bohdan. Jestliže vyhraje dva sety po sobě, získá prémii. Jaké pořadí má Cyril zvolit, aby měl větší šanci získat prémii, jestliže Adam je lepší hráč než Bohdan?*

Příklad 4: *Na party se sešlo 14 studentů, z toho 8 vysokoškoláků a 6 středoškoláků. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané čtveřici budou*

1. *všichni čtyři středoškoláci,*
2. *právě jeden vysokoškolák,*
3. *aspoň jeden vysokoškolák?*

Příklad 5: *Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině n lidí mají alespoň dva narozeniny ve stejný den (neuvažujte přestupné roky a předpokládejte, že se během celého roku děti rodí rovnoměrně)?*

Příklad 6: *Pravděpodobnost výhry hráče A nad hráčem B je $0,7$. Jaká je pravděpodobnost, že během deseti po sobě jdoucích zápasů*

1. *alespoň jednou vyhrál B,*
2. *maximálně dvakrát vyhrál B?*

Příklad 7: *Signál prochází zařízením zleva (L) doprava (P). Jednotlivé bloky v zařízení mají poruchu s pravděpodobnostmi vyznačenými na obrázku a výskyty poruch jsou na sobě nezávislé. Určete pravděpodobnost, že vyslaná zpráva bude přenesena.*

$P(A^c) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$P(B^c) = 0{,}6^2 = 0{,}36$

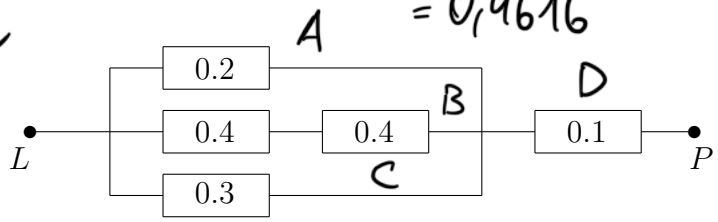
$P(C^c) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

přes princip inkluze a exkluze

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

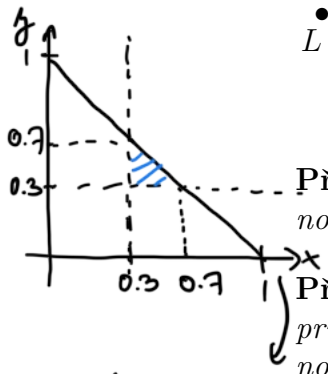
$P(A \cup B \cup C) = 0{,}8 + 0{,}36 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}36 - 0{,}36 \cdot 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}7$

$= 0{,}9616$



$P(\alpha \cap D) = 0{,}9616 \cdot 0{,}9$

$= 0{,}86544$



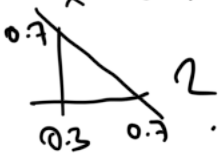
$y = 1 - x$

$y = 0.3$

$0{,}3 = 1 - x$

$x = 1 - 0.3$

$x = 0.7$



2

$\frac{0.4^2}{2} = 0.08$

$\frac{0.08}{1} = 0.08$

Příklad 8: *Mějme dvě náhodná čísla x a y mezi 0 a 1. Jaká je pravděpodobnost, že jsou obě větší než 0,3 a zároveň jejich součet je menší než 1?*

Příklad 9: *Na rovnoměrnou nekonečnou čtvercovou mřížku, kde vzdálenost průsečíků je a, hodíme minci o průměru b, kde $b < a$. Jaká je pravděpodobnost, že mince protne nějakou z linek této mřížky?*

$\updownarrow \cdots b/2$

Příklad 10: *Lodě Victoria a Silver Arrow přijedou do přístavu úplně náhodně nezávisle na sobě v následujících 24 hodinách. Victoria počká 2 hodiny a pak odplouvá, Silver Arrow počká 1 hodinu a pak odplouvá. Jaká je pravděpodobnost, že se v přístavu potkají?*

$\frac{(a-b)^2 = S0}{a^2}$

Příklad 11: *Nezávislé jevy A, B, C mají po řadě pravděpodobnosti* 0.2, 0.3, 0.4. *Určete pravděpodobnost jevu $D = (A \cup B) \cap C$.*

Příklad 12: *Náhodné jevy A a B jsou nezávislé, $P(A \cup B) = 0.545$, $P(A \cap B) = 0.105$. Určete pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B^c)$.*

$P(A) = 1 - \frac{(a-b)^2}{a^2}$

Příklad 13: *Házíme dvěma kostkami. Označme*
jev A... "na 1.kostce padne sudý počet puntíků",
jev B... "na 2.kostce padne lichý počet puntíků",
jev C... "na obou kostkách padne stejný počet puntíků".
Jsou jevy A,B,C nezávislé? Jsou po dvou nezávislé?

Příklad 14: *Na MFF studuje 50% studentů informatiku, 30% matematiku a 20% fyziku. Na informatice je 10% dívek, na matematice 30% a na fyzice 20%. Jaká je pravděpodobnost, že*

1. *náhodně vybraný student je dívka?* $0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 18\%$
2. *náhodně vybraná studentka studuje matematiku?* $\frac{0{,}3}{0{,}6} = 50\%$

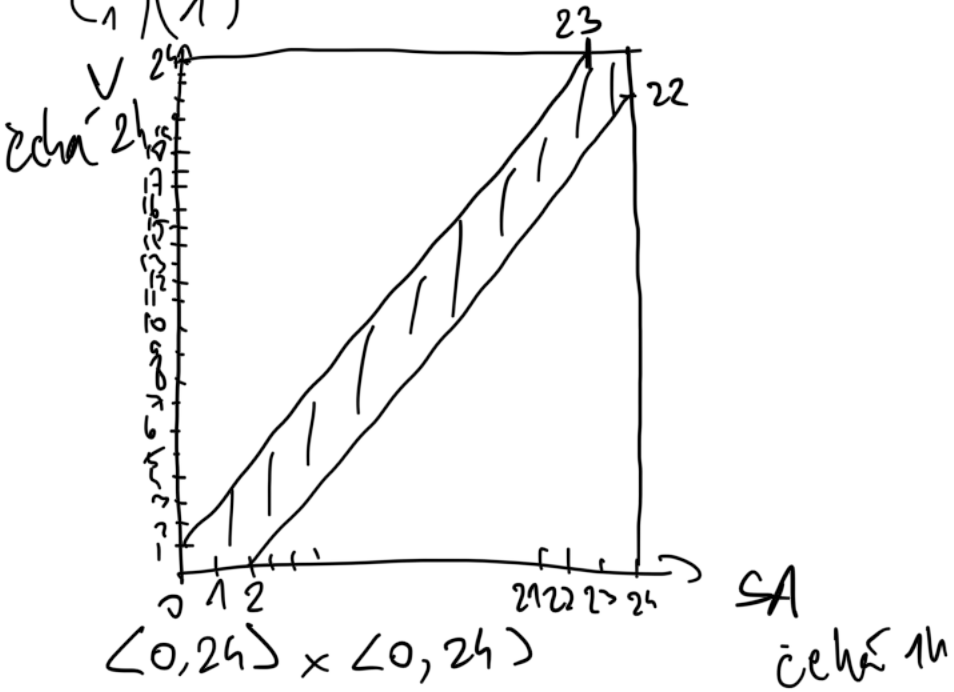
Příklad 15: *Požití alkoholu bylo prokázáno u* 1% *všech řidičů a u* 10%

(10) nepotkají se:

$P(A^c) = \frac{23^2}{\binom{24}{1}\binom{23}{1}} = 0{,}9583$

$P(A) = 1 - P(A^c) = 0{,}042$

pouze pro celé hodiny



$S(A) = 24^2 - \frac{23^2}{2} - \frac{22^2}{2} = 69{,}5$

$P(A) = \frac{69{,}5}{24^2} = 0{,}121$

(11) $P(A) = 0{,}2$

$P(B) = 0{,}3$

$P(C) = 0{,}4$

$P(D) = P((A \cup B) \cap C) = (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \cdot P(C) = (0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}2 \cdot 0{,}3) \cdot 0{,}4 = 0{,}176$

$A \perp\!\!\!\perp B \iff P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\iff P(A \cap B) = P(A) P(B)$

↓ jsou nezávislé

(92) $P(A \cup B) = 0.545$

$P(A \cap B) = 0.105$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$0{,}545 = P(A) + P(B) - 0{,}105$

$0{,}105 = P(A) \cdot P(B)$

$P(A) = 0{,}545 - P(B) + 0{,}105$

$0{,}105 = b(0{,}545 - b + 0{,}105)$

$0{,}105 = 0{,}545b - b^2 + 0{,}105b$

$0{,}105 = 0{,}65b - b^2$

$b^2 - 0{,}65b + 0{,}105 = 0$

$b_{12} = \frac{0{,}65 \pm \sqrt{0{,}4225 - 0{,}420}}{2} =$

$= \frac{0{,}65 \pm \sqrt{0{,}0025}}{2} =$

$= \frac{0{,}65 \pm 0{,}05}{2} = \begin{cases} \frac{0{,}7}{2} = 0{,}35 \\ \frac{0{,}6}{2} = 0{,}3 \end{cases}$

65
65

325
390

4225

105
4

0,420

$P(A) = 0{,}35 \quad P(B) = 0{,}3$

nebo naopak

(13) $P(A) = 1/2$ $\quad |\Omega| = 36$

$P(B) = 1/2$

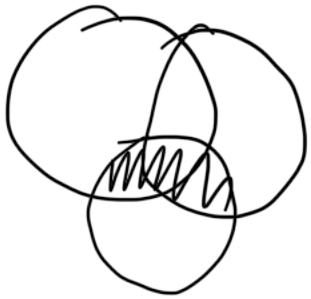
$P(C) = \frac{6}{36} = 1/6$

$P(A \cap B) = 1/4$

$P(A \cap C) = 1/12$ 2

$P(B \cap C) = 1/12$

(11) $A \perp\!\!\!\perp B \perp\!\!\!\perp C$



$P(A) = 0{,}2$

$P(B) = 0{,}3$

$P(C) = 0{,}4$

$P[(A \cup B) \cap C]$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = P[A \cap C] + P[B \cap C] - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]$

$= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C)$

$P(O) = 0{,}01$ (opilý)

$P(O|N) = 0{,}1$ (opilý, už způsobil nehodu)

$P(N|O) = \frac{P(N)}{0{,}01} \cdot 0{,}1$

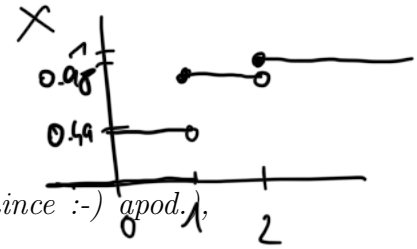
$P(N|O) = \frac{P(N)}{P(O)} \cdot P(O|N)$

$P(N|O)$? $P(N)$?

$P(O|N) = \frac{P(O \cap N)}{P(N)}$?

řidičů, kteří způsobili dopravní nehodu. Kolikrát se požitím alkoholu zvyšuje riziko nehody?

Příklad 16: *Uvažujme hod mincí, tj.* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$*, kde*
ω_1 je jev, že padl rub, přičemž $P(\omega_1) = 0.49$*,*
ω_2 je jev, že padl líc, přičemž $P(\omega_2) = 0.49$*,*
ω_3 je jev, že nastala výjimečná situace (hrana, ukradení mince :-) apod.), přičemž $P(\omega_3) = 0.02$*).*
Sestrojte dvě různé náhodné veličiny a nakreslete jejich distribuční funkce.



$X: \Omega \to \mathbb{R}$

$X(\omega_1) = 0$

$X(\omega_2) = 1$

$X(\omega_3) = 2$

Příklad 17: *Určete konstantu c tak, aby funkce $f(x)$ byla hustota nějaké náhodné veličiny, když*

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-2x}, & x \in (0,1), \\ 0, & jinak. \end{cases}$$

$p(x) = P(X = x)$

$p(0) = 0{,}49 \quad p(1) = 0{,}49$

$p(2) = 0{,}02$

Příklad 18: *Mějme funkci*

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x \in (0,\infty), \\ 0, & jinak. \end{cases}$$

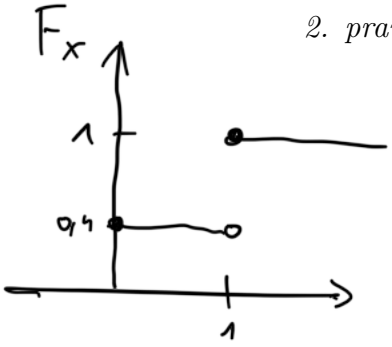
1. *Ověřte, že f je hustota pravděpodobnosti.*
2. *Sestrojte distribuční funkci příslušnou této hustotě.*
3. *Spočtěte pravděpodobnost $P(-1 \le X \le 1)$, kde X je náhodná veličina s hustotou f.*
4. *Spočtěte $\mathbb{E}X$ a $\operatorname{var} X$.*

Příklad 19: *Náhodná veličina X má diskrétní rozdělení s pravděpodobnostní funkcí $P(X = 0) = 0.4$ a $P(X = 1) = 0.6$. Náhodná veličina Y má spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle -1, 2 \rangle$. Náhodná veličina Z je směsí $Z = \mathrm{Mix}_{1/4}(X, Y)$. Určete*

1. *distribuční funkci F_Z,*
2. *pravděpodobnosti $P(0 \le Z \le 1)$ a $P(Z \ge 0.5)$,*

$F_Z = \frac{1}{4} F_X + \frac{3}{4} F_Y$

F_Z : 0 pro $x < -1$; $x + 1$ pro $-1 < x \le 0$



14) 50% IT - 10% dívek
30% Ma - 30% dívek
20% Fy - 20% dívek

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j \;/\; P(A_i) > 0$

$\bigcup_i A_i = \Omega$

A_1 = Student IT
A_2 = Student Ma
A_3 = Student Fy

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)\,P(A_i)$$

$P(B|A_1) = 0{,}1 \qquad P(A_1) = 0{,}5$

$P(B|A_2) = 0{,}3 \qquad P(A_2) = 0{,}3$

$P(B|A_3) = 0{,}2 \qquad P(A_3) = 0{,}2$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)\,P(A_j)}$$

$$P(B) = 0{,}1 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}18$$

$$P(A_2|B) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}3}{0{,}18} = 0{,}5$$

15) A ... požití alkoholu
B ... způsobení nehody

$\frac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})}$ → absolutní riziko / → relativní riziko

$P(A) = 0{,}01$

$P(A|B) = 0{,}1$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(A)\,P(B|A) + P(\bar{A})\,P(B|\bar{A})}$$

$$0{,}1 = P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(B|A^c)\,P(A^c)} =$$

$$= \frac{0{,}01\,P(B|A)}{0{,}01\,P(B|A) + 0{,}99\,P(B|A^c)} =$$

$$= \frac{0{,}01\,\cancel{P(B|A)}}{\cancel{P(B|A)}\left[0{,}01 + 0{,}99\,\underbrace{\frac{P(B|A^c)}{P(B|A)}}_{x^{-1}}\right]}$$

(16)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0{,}49, & 0 \le x < 1 \\ 0{,}98, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

(17)

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-2x} & x \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 cxe^{-2x}\,dx = c\int_0^1 xe^{-2x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = e^{-2x} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right| =$$

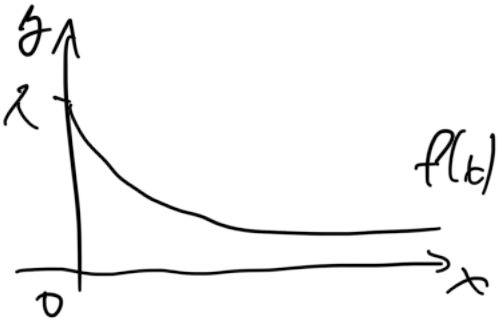
$$c\left[\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,dx\right] = c\left[-\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1\right] =$$

$$= c\left[-\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}\right] = c\left[-\frac{3}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}\right] =$$

$= 1 \rightarrow$ vyřešit rovnici

(18) $f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x \in (0, \infty) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Exponenciální rozdělení $Exp(\lambda) \rightsquigarrow f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot 1_{[x \geq 0]}$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 3\int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx = 3\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{\infty} =$$

$$\left[-e^{-3x}\right]_0^{\infty} \rightarrow \lim_{x\to\infty} -e^{-3x} + e^0 =$$

$$0 + 1 = 1$$

$\Downarrow$

jedná se o hustotu

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \left[-e^{-3t}\right]_0^{x} = -e^{-3x} + 1$$

$$F(x) = P(X \leq x) \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -e^{-3x} + 1, & x > 0 \end{cases} \qquad \int_0^x f(t)\,dt \Big|_{x>0}^{x<0} 0$$

$P(-1 \le X \le 1)$, X je náhodná veličina s hustotou f

$$P[a \le X \le b] = P[X \le b] - P[X < a] \quad [a \le x \le b] = [x \le b] \setminus [x < a]$$

$$= F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(-1 \le X \le 1) = P(X \le 1) - P(X < -1)$$

$$= F_X(1) - F_X(-1) = 1 - e^{-3} - 0 = \underline{\underline{1 - \frac{1}{e^3}}}$$

$EX = ?$ $\quad \operatorname{var} X = ?$

$$EX = 3\int_0^{\infty} x e^{-3x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & v' = e^{-3x} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{matrix} \right| = 3\left(\overbrace{\left[-\frac{1}{3} x e^{-3x} \right]_0^{\infty}}^{0} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx \right| = \int e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{var} X \overset{\text{def.}}{=} E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

$$E\varphi(X) = \int \varphi(x)\,dF(x)$$

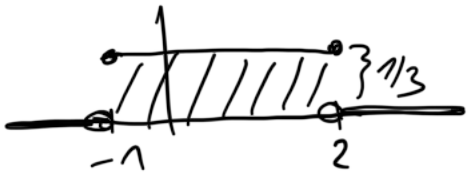
$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 3e^{-3x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & v' = 3e^{-3x} \\ u' = 2x & v = -e^{-3x} \end{matrix} \right|$$

$$= \left[-x^2 e^{-3x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-3x}\,dx = \frac{2}{9}$$

(19) $X \sim Alt(\pi)$, $p = P(X=1) = 0{,}6$

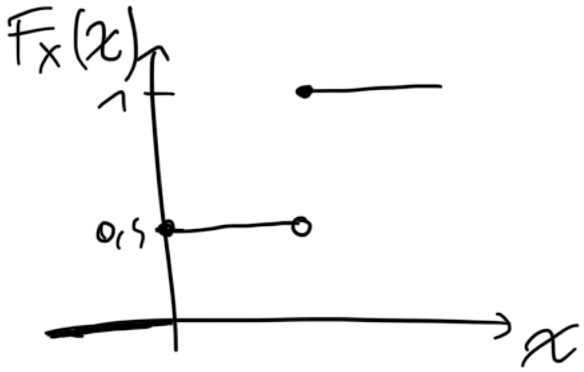
$Y \sim Ro(\langle -1, 2\rangle) \rightsquigarrow f_Y(y)$

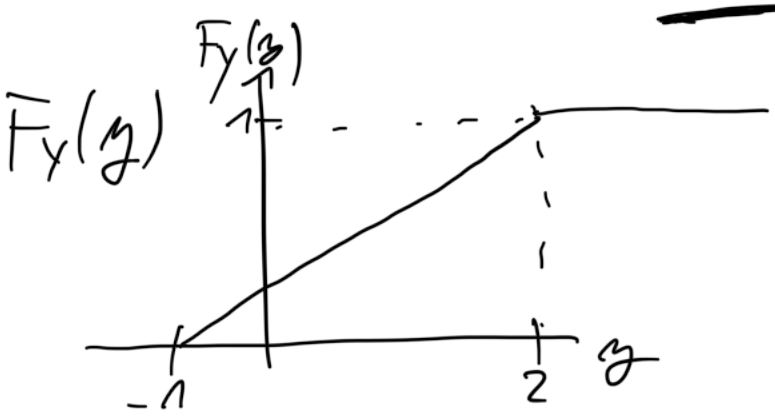
$Z = Mix_{1/4}(X, Y)$



$y \in \langle -1, 2\rangle$

$$F_X(x) \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0{,}4 & x \in \langle 0, 1) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$





$$F_Y \begin{cases} 0 & y < -1 \\ 1 & y \geq 2 \\ 1/3y + 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1/4 \cdot 0 + 3/4 \cdot 0 = 0 & z < -1 \\ 1/4 \cdot 0 + 3/4\,(z+1) & z \in \langle -1, 0) \\ 1/4 \cdot 0{,}4 + 3/4 \cdot 1/3(z+1) & z \in \langle 0, 1) \\ 1/4 \cdot 1 + 3/4 \cdot 1/3(z+1) & z \in \langle 1, 2) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P(0 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z < 0) = F_Z(1) - \lim_{t \to 0^-} F_Z(t) =$$

$$= 1/4 + 1/2 - 1/4 = 1/2 \;//$$

$$P(X < x) = P(X \le x) = F_X(x), \text{ je-li spojitá}$$

$$P(X < x) = P(X \le x) - P(X = x) = F_X(x) - P(X = x)$$

$$P(Z \ge 1/2) = 1 - P(Z \le 1/2) = 1 - \lim_{x \to 1/2^-} F_Z(1) =$$

$$= 1 - F_Z(1/2) = 1 - (1/10 + 1/4 \cdot 3/2) = 1 - (1/10 + 3/8) =$$

$$= \frac{21}{40}$$

$$\mathbb{E}Z = c\,\mathbb{E}X + (1-c)\,\mathbb{E}Y$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1} x_i\, P(X = x_i) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}6$$

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} x \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{6}[4-1]$$

$$= \frac{1}{2} \;//$$

$$\mathbb{E}Z = 1/4 \cdot 3/5 + 3/4 \cdot 1/2 = 21/40$$

4) $1/4 + 1/4 + t/4 \geq 9/10 \mid \cdot 20$

$10 + 5t \geq 18$

$5t \geq 8$

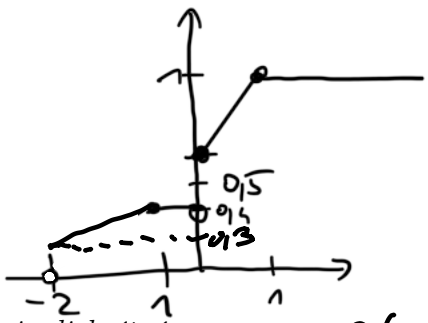
$t \geq 8/5$

3. *střední hodnotu* $\mathbb{E}Z$,

4. $t \in \mathbb{R}$ *takové, že* $P(Z \leq t) = 0.9$.

Příklad 20: *Náhodná veličina* X *má distribuční funkci*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -2) \\ 0.1\,x + 0.5 & , x \in \langle -2,\ -1) \\ 0.4 & , x \in \langle -1,\ 0) \\ 0.3\,x + 0.6 & , x \in \langle 0,\ 1) \\ 1 & , x \in \langle 1, \infty) \end{cases}$$



$c = 0,6$

1. *Vyjádřete* X *jako směs náhodných veličin* D *a* S, *kde* D *je diskrétní a* S *spojitá. Popište a znázorněte jejich rozdělení.*

2. *Určete* $\mathbb{E}X$.

3. *Najděte kvantilovou funkci* q_X.

$P(D=-2) = 3/10 \cdot 1/6 = 1/2$

$P(D=0) = 1/5 \cdot 1/6 = 1/3$

$P(D=1) = 1/10 \cdot 1/6 = 1/6$

Příklad 21: *Pravděpodobnost, že atlet v oddíle skočí do dálky přes 5m, je 0.7. V oddíle je 6 atletů.*

1. *Jaké rozdělení pravděpodobnosti má náhodná veličina* X *popisující, zda atlet skočil* ($X = 1$) *nebo neskočil* ($X = 0$) *přes 5m? Určete i střední hodnotu* $\mathbb{E}X$ *a rozptyl* $\operatorname{var} X$.

2. *Jaké rozdělení má náhodná veličina* Y *popisující počet atletů v oddíle, kteří skočili přes 5m? Určete i střední hodnotu* $\mathbb{E}Y$ *a rozptyl* $\operatorname{var} Y$.

3. *Jaká je pravděpodobnost, že přes 5m skočí v oddíle alespoň 4 atleti?*

Příklad 22: *Semena mají klíčivost* $p \in (0, 1)$. *Jaký je optimální počet* n *semen v jamce, aby byla co nejvyšší pravděpodobnost, že vyklíčí právě jedno? Řešte obecně a pro* $p = 1/3$.

Příklad 23: *Na látce (pevné šířky 1m) je průměrně jeden kaz na 10m délky. Předpokládáme, že počet kazů se řídí Poissonovým rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že na 50m délky látky bude*

$F(D) = \begin{matrix} = 0 & (-\infty, -2) \\ = 1/2 & \langle -2, 0) \\ = 5/6 & \langle 0, 1) \\ = 1 & \langle 1, \infty) \end{matrix}$

$f_D(x) = P[D=x]$

$$F_X(x) = c \cdot F_D(x) + (1-c) F_S(x)$$

$$F_S(x) = \frac{F_X(x) - c \cdot F_D(x)}{1-c}$$

$F_S(x) = 0 \qquad (-\infty, -2)$

$$= \frac{0{,}1x + 0{,}5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{4}{10}(0{,}1x + 0{,}2) = 0{,}25x + \frac{1}{2} \qquad \langle -2, -1)$$

$$= \frac{0{,}4 - \frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = 0{,}25 \qquad \langle -1, 0)$$

$$= \frac{0{,}3x + 0{,}6 - \frac{5}{10}}{\frac{4}{10}} = 0{,}75x + 0{,}25 \qquad \langle 0, 1)$$

$$= 1 \qquad \langle 1, \infty)$$

$$EX = c \cdot ED + (1-c) ES = 0{,}6 \cdot -\frac{5}{6} + 0 = -1/2$$

$ED = -5/6$

$$ES = \int_{-\infty}^{\infty} x f_S(x) dx = \int_{-2}^{-1} x \cdot 1/4 \, dx + \int_{0}^{1} x \frac{3}{4} dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = 0$$

Kvantilová fce

$$q_{F_X}(\alpha) = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\} + \sup\{x : F_X(x) \leq \alpha\}\right)$$

$$q_X(\alpha) = (\alpha - 0{,}5)\cdot 10 \qquad \alpha \in \langle 0{,}3;\, 0{,}4)$$

$$\alpha = 0{,}1 \cdot q(\alpha) + 0{,}5$$

$$\alpha = 0{,}3 = 0{,}1 q(\alpha)$$

$$\alpha \in \langle 0{,}6\,;\, 0{,}9)$$

(21) a) $P(X=1)=0,7 \quad P(X=0)=0,3$

$$EX=\sum x P(x)=1\cdot 0,7+0\cdot 0,3=\underline{\underline{0,7}}$$

$$\operatorname{var} X = E(X-EX)^2 = (1-0,7)^2\cdot 0,7 + (0-0,7)^2\cdot 0,3 =$$

$$= 0,09\cdot 0,7 + 0,49\cdot 0,3 = 0,063+0,147 = 0,21$$

b) $Y = \text{Binom}(n,p) \quad n=6,\ p=0,7$

$$EY = n\cdot p = 6\cdot 0,7 = 4,2$$

$$\operatorname{var}(Y) = n\cdot p(1-p) = 6\cdot 0,7\cdot 0,3 = 1,26$$

c) $P(Y \geq 4) = P(Y=4) + P(Y=5) + P(Y=6) =$

$$P(Y=k) = \binom{n}{k} p^n (1-p)^{n-k}$$

(22) klíčivost $p \in (0,1)$, optimální počet v jamce, aby vyklíčilo právě jedno ?

podle binomického rozdělení je pst vyklíčení právě jednoho semene

$p \in (0,1)$ $n = ?$ $p = 0,3$

$X \sim Bi(n, p)$ X je počet vyklíčených semen z celkového počtu n semen

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k=1 \quad = \binom{n}{1} p (1-p)^{n-1} = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \sim$$

$$\sim f_p(n) = [n \cdot p][1-p^{n-1}]$$

$$f'_p(n) = p(1-p)^{n-1} + np(1-p)^{n-1} \ln(1-p)$$

$$= p(1-p)^{n-1}\left[1 + n\ln(1-p)\right] = 0$$

$$1 + n\ln(1-p) = 0$$

$$n\ln(1-p) = -1$$

$$n = -\frac{1}{\ln(1-p)}$$

pro $p = 0{,}3$ $\quad n = -\frac{1}{\ln(1-p)} = 2{,}8 \doteq$ 3 semena

1. *přesně 10 kazů,*

2. *maximálně 3 kazy,*

3. *přesně 5 kazů, z toho 4 na prvních 20m?*

Příklad 24: *Pravděpodobnost narození chlapce je 0.51. Jaká je pravděpodobnost, že v dané porodnici dnes bylo nejpozději (v časovém pořadí) čtvrté narozené dítě holčička?*

Příklad 25: *Při numerickém výpočtu se reálná čísla zaokrouhlují na jedno desetinné místo. Jaká je pravděpodobnost, že vzdálenost skutečného čísla od zaokrouhleného bude větší než 0.04?*

Příklad 26: *Na zákaznickou linku přichází průměrně 12 hovorů za hodinu. Doba čekání na hovor má exponenciální rozdělení.*

1. *Jaká je pravděpodobnost, že nejbližší hovor přijde nejdříve za 10 minut?*

2. *Určete čas t takový, že nejbližší hovor přijde nejdříve za t minut s pravděpodobností 0.7.*

Příklad 27: *Výška dětí v 1.třídě je náhodná veličina $X \sim N(130, 36)$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané dítě bude*

1. *větší než 136 cm,*

2. *menší než 118 cm,*

3. *mít výšku mezi 127 a 133 cm?*

Příklad 28: *Oštěpařky Anna a Barbora mají průměrně délky hodů* 67 *m, respektive* 75 *m, a směrodatné odchylky* 6 *m, respektive* 3 *m. Předpokládejme, že délky hodů mají nezávislá normální rozdělení. Spočtěte pravděpodobnost, že při jednom hodu hodí Anna dál než Barbora.*

Příklad 29: *Délka hrany krychle je náhodná veličina $X \sim Ro(1, 2)$. Určete distribuční funkci náhodné veličiny Y popisující plochu povrchu této krychle.*

(23) šířka = 1 m

průměrně 1 kaz na 10 m

Poissonovo rozdělení kazů na délku

$X \sim Po(\lambda)$ X je počet kazů na 50 metrech

víme, že $\lambda = \frac{50}{10} = 5$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots$$

(a) $$P(X=10) = \frac{5^{10} e^{-5}}{10!} \left(\approx 1{,}81\,\%\right)$$

(b) $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$\approx 26{,}5\,\%$ $= \sum_{k=0}^{3} e^{-5} \frac{5^k}{k!} = e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!}\right)$

(c) X_1 ... počet kazů na prvních 20 metrech $\lambda = 2$

$$P(X_1 = 4) = \frac{2^4 \cdot e^{-2}}{4!} = \alpha$$

X_2 ... počet kazů na dalších 30 metrech $\lambda = 3$ $P(A) = \alpha \cdot \beta$

$$P(X_2 = 1) = \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = \beta$$

$$= \frac{e^{-2} 2^4}{4!} \cdot \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = e^{-5} \cdot 2 \quad \left(\approx 1{,}37\,\%\right)$$

(24) X... počet hozených M před první $Š$

$X \sim Geom(0{,}49)$

$$P(X=k) = (1-p)^k \cdot p = (0{,}51)^k \cdot 0{,}49$$

$$P(X<k) = \sum_{i=0}^{3} P(X=i) = 0{,}49 \sum_{k=0}^{3} 0{,}51^k = 0{,}49 \frac{0{,}51^3}{0{,}51-1}$$

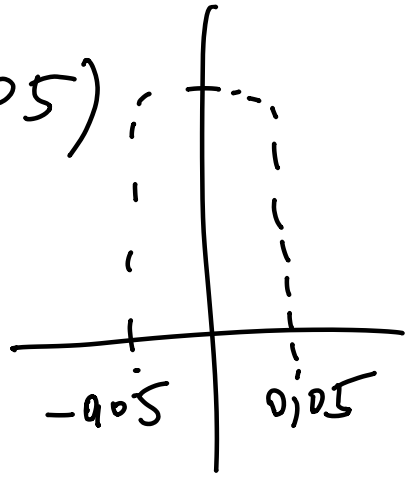
$$\sum_{k=0}^{n} a_1 q^k = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$q_{F_X}(\alpha) = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}$$

$$q_X(\alpha) = 1/2 \left(\inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\} + \sup\{x \cdot F_X(x) \leq \alpha\}\right)$$

(25) $X \sim Ro(-0{,}5, 0{,}5)$

$$f_X(x) = 10 \quad x \in (-0{,}05, 0{,}05)$$
$$0 \quad \text{jinak}$$



$$1 - P(X \in (-0{,}04, 0{,}04)) =$$

$$= 1 - \int_{-0{,}04}^{0{,}04} 10\,dx = 1 - \left[10x\right]_{-0{,}04}^{0{,}04} =$$

$$= 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

(26.) 12 hovorů za hodinu $F(x) = 1 - e^{-2x}$

X ..... doba čekání na hovor v minutách

$EX = 5 \longrightarrow$ 5 min do dalšího hovoru

$EX = 1/\lambda$ $\quad P(X \geq t) = 0{,}7 = 1 - P(X < t)$

$\text{var}\, X = 1/\lambda^2$ $\quad 0{,}3 = 1 - e^{-1/5}$

$0{,}7 = e^{-1/7 t}$

$$\log(0{,}7) = \frac{1}{5}t$$
$$-5\log(0{,}7) = t$$

(27) X ... výška dětí v první třídě

$$X \sim N(130, 36)$$
$$\mu \quad \sigma^2$$

$$\Phi = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(X \leq x)$$

1. $P(X>136) = 1 - P(X \leq 136) = 1 - \Phi\left(\frac{136-130}{6}\right) =$

$= 1 - \Phi(1) = \Phi(-1)$

2. $P(X \leq 118) = \Phi\left(\frac{118-136}{6}\right) = \Phi(-2)$

3. $P(127 < X < 133) = \Phi\left(\frac{133-130}{6}\right) - \Phi\left(\frac{127-130}{6}\right) =$

$= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1$

(28) $A \sim N(67, 36)$ $\quad X \sim N(EX, \sigma^2)$

$B \sim N(75, 9)$ $\quad Z = A - B$

A ... délka hodu Anny

B ... délka hodu Barbory

Z ... rozdíl délek hodů Anny a Barbory

$EZ = 67 - 75 = -8$

$\operatorname{var} Z = 36 + 9 = 45$

$Z \sim N(-8, 45)$ $\quad P(Z > 0) = 1 - P(Z \leq 0)$

$X = \frac{Z - (-8)}{\sqrt{45}} = \frac{Z + 8}{\sqrt{45}}$

$X \sim N(0, 1)$ $\quad Z = \sqrt{45}X - 8$

$= 1 - P(\sqrt{45}X - 8 \leq 8) = 1 - P\left(X \leq \frac{8}{\sqrt{45}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{8}{\sqrt{45}}\right)$

(2a) $X \sim R_o(1,2)$ X... délka hrany krychle

Y... plocha krychle $P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-1}{2-1} =$

$Y = 6 \cdot X^2$

$= x-1, \; x \in (1,2)$

$1, \; x \geq 2$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(6 \cdot X^2 \leq y) \quad 1, x \geq 2$

$\|$

$P(X^2 \leq \frac{1}{6} y) \overset{y \geq 0}{=} P(X \leq \sqrt{\frac{1}{6} y}) =$

$$= \begin{cases} 0, \sqrt{\frac{1}{6} y} \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 6 \\ \sqrt{\frac{1}{6} y} - 1, \sqrt{\frac{1}{6} y} \in (1,2) \Leftrightarrow y \in (6, 24) \\ 1, \sqrt{\frac{1}{6} y} \geq 2 \Leftrightarrow y \geq 24 \end{cases}$$

Příklad 30: *Průměrný počet zákazníků během dne v první prodejně je 20, ve druhé prodejně 25 (předpokládáme, že oba počty se řídí Poissonovým rozdělením). Odvoďte rozdělení počtu zákazníků v obou prodejnách dohromady.*

Příklad 31: *Nechť* $X \sim Ro(0, 2)$ *a* $Y = X^2 + 1$.

1. *Sestrojte distribuční funkci náhodné veličiny* Y.
2. *Spočtěte* $cov(X, Y)$.
3. *Rozhodněte, zda jsou* X *a* Y *nezávislé? Proč?*

Příklad 32: *Sdružené pravděpodobnosti náhodných veličin* X *a* Y *jsou dány následující tabulkou:*

	X=0	*X=1*	*X=2*
Y=0	*1/4*	*1/8*	*0*
Y=1	*1/4*	*1/4*	*1/8*

1. *Jaká jsou jejich marginální rozdělení?*
2. *Určete varianční a korelační matici.*
3. *Jsou veličiny* X *a* Y *nezávislé? Zdůvodněte.*

Příklad 33: *Sdružená hustota náhodných veličin* X *a* Y *je*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & jinak. \end{cases}$$

1. *Jaká jsou jejich marginální rozdělení?*
2. *Jsou veličiny* X *a* Y *nezávislé? Zdůvodněte.*
3. *Určete varianční a korelační matici.*

Příklad 34: *V lese se narodí průměrně 4 zajíci denně. Předpokládejme, že počet narozených zajíců se řídí Poissonovým rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že v následujících 7 týdnech se v lese narodí alespoň 175 zajíců?*

(30) X... počet zákazníků v prodejně 1

Y... — " — 2

$\mathbb{E}X = 20 = \lambda_1$

$\mathbb{E}Y = 25 = \lambda_2$

$X * Y = X + Y = Z$

$$P(Z=k) = P(X+Y=k) = P(Y=k-X)$$

$$\sum_{i=1}^{k} P(Y=k-i \mid X=i)\, P(X=i)$$

$$= \sum P(Y=k-i \wedge X=i) = \sum P(Y=k-i) \cdot P(X=i)$$

$$P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(Y=k-i)\, P(X=i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{(k-i)!\, i!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!\, i!} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}_{(\lambda_1+\lambda_2)^k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)$$

$$= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y \Rightarrow cov(X,Y) = 0$$

(31) $X \sim R_0(0,2)$

$Y = X^2 + 1$

1.) $F_Y(y) = ?$

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x}{2} \qquad x \in \langle 0,2 \rangle$$

$F_Y(y) = P(Y \leq$

.

.

.

2.) $\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2} = 1$

$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(X^2+1) = \mathbb{E}X^2 + 1 =$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Př. 31: $X \sim R_0(0,2)$

$Y = X^2 + 1$

$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$

$= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X(X^2+1) - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}(X^2+1)$

$= \mathbb{E}X^3 + \mathbb{E}X - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X =$

$= \mathbb{E}X^3 - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}X^2 = 2 - 1 \cdot 1/3 = 2/3 \neq 0 \Rightarrow X, Y$ NEJSOU NEZÁVISLÉ

$\mathbb{E}X = \int$

.

.

.

Př. 32

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	$1/4$	$1/8$	0
$Y=1$	$1/4$	$1/4$	$1/8$

$P(X=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) = 1/2$

$P(X=1) = 3/8$

$P(X=2) = 1/8$

$P(Y=0) = 3/8$

$P(Y=1) = 5/8$

$\begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X,X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & \operatorname{cov}(Y,Y) \end{pmatrix}$

$\operatorname{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{31}{64}$

$\mathbb{E}X = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 3/8 + 2 \cdot 1/8 = 5/8$

$\mathbb{E}X^2 = 0^2 \cdot 1/2 + 1^2 \cdot 3/8 + 2^2 \cdot 1/8 = \frac{7}{8}$

$\operatorname{var}Y = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = 5/8 - \frac{25}{64} = \frac{15}{64} =$

$\mathbb{E}Y = 5/8$

$\mathbb{E}Y^2 = 5/8$

$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y = 1/2 - 5/8 \cdot 5/8 = 7/64$

$\mathrm{corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}X}\sqrt{\mathrm{var}Y}} = \frac{7/64}{\sqrt{\frac{21}{64}}\sqrt{\frac{15}{64}}} = \frac{7}{\sqrt{21\cdot 15}}$ $\mathrm{corr}\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{\sqrt{21\cdot 15}} \\ \frac{7}{\sqrt{21\cdot 15}} & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{E}XY = 1/4 + 2/8$ $\begin{pmatrix} 31/64 & 7/64 \\ 7/64 & 15/64 \end{pmatrix}$

$P(X=2, Y=0) = 0$ $P(X=2)\cdot P(Y=0) = 1/8 \cdot 3/8 \neq 0$

Příklad 35: *Tramvaj má intervaly mezi příjezdy 10 minut. Jaká je pravděpodobnost, že během 24 pracovních dnů stráví člověk při cestách do práce a zpět čekáním na tramvaj nejvýše tři hodiny?*

Příklad 36: *Letecká společnost prodává letenky a chce co nejvíce utržit. Letadlo má* 216 *míst, ale ví se, že zhruba* 5% *lidí se k odletu nedostaví.*

1. *Jaká je pravděpodobnost, že pokud společnost prodá 220 letenek, nepřesáhne počet cestujících kapacitu letadla?*
2. *Kolik může společnost prodat letenek na jeden let, chce-li držet pravděpodobnost, že nepřesáhne kapacitu, kolem 90%?*

Příklad 37: *Uvažujme následující data:*

1. *počty jistých rostlin na ploše 1 m^2: 0, 2, 1, 4, 4, 5, 2, 3, 7;*
2. *časy (v sekundách) mezi impulzy v mozku: 4.25, 0.65, 1.35, 0.20, 0.55, 6.63, 1.38, 0.22, 0.27;*
3. *venkovní teploty naměřené v různých letech při pravidelné podzimní akci: 8.07, 19.23, 9.27, 5.71, 12.62, 11.24, 11.92, 17.30, 14.87.*

Nakreslete pro tato data

1. *histogramy*
2. *boxploty*
3. *empirickou distribuční funkci*

a odhadněte, z jakého rozdělení mohou tato data pocházet. Řádně zdůvodněte.

Příklad 38: *Počet kazů na tabulkách skla se řídí Poissonovým rozdělením. Bylo pozorováno*

17	*tabulek bez kazu*
4	*tabulky s 1 kazem*
1	*tabulka s 2 kazy*
2	*tabulky s 3 kazy*
1	*tabulka s 5 kazy.*

(34) X... počet zajíců za den

$X \sim Po(\lambda)$ $\lambda = 4$ za den

$\mathbb{E}X = 4 \cdot 49 = 196$

$\mathrm{var}X = 4 \cdot 49 = 196$

$Z = \frac{X - \mathbb{E}X}{\mathrm{var}X}$

$P(X \geq 175) = 1 - \Phi\left(\frac{175 - \mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{var}X}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{175 - 196}{\sqrt{196}}\right) =$

$1 - \Phi\left(\frac{-21}{14}\right) = 1 - \Phi(-3/2)$

CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA

$X_1, \dots, X_n$ nah. výběr

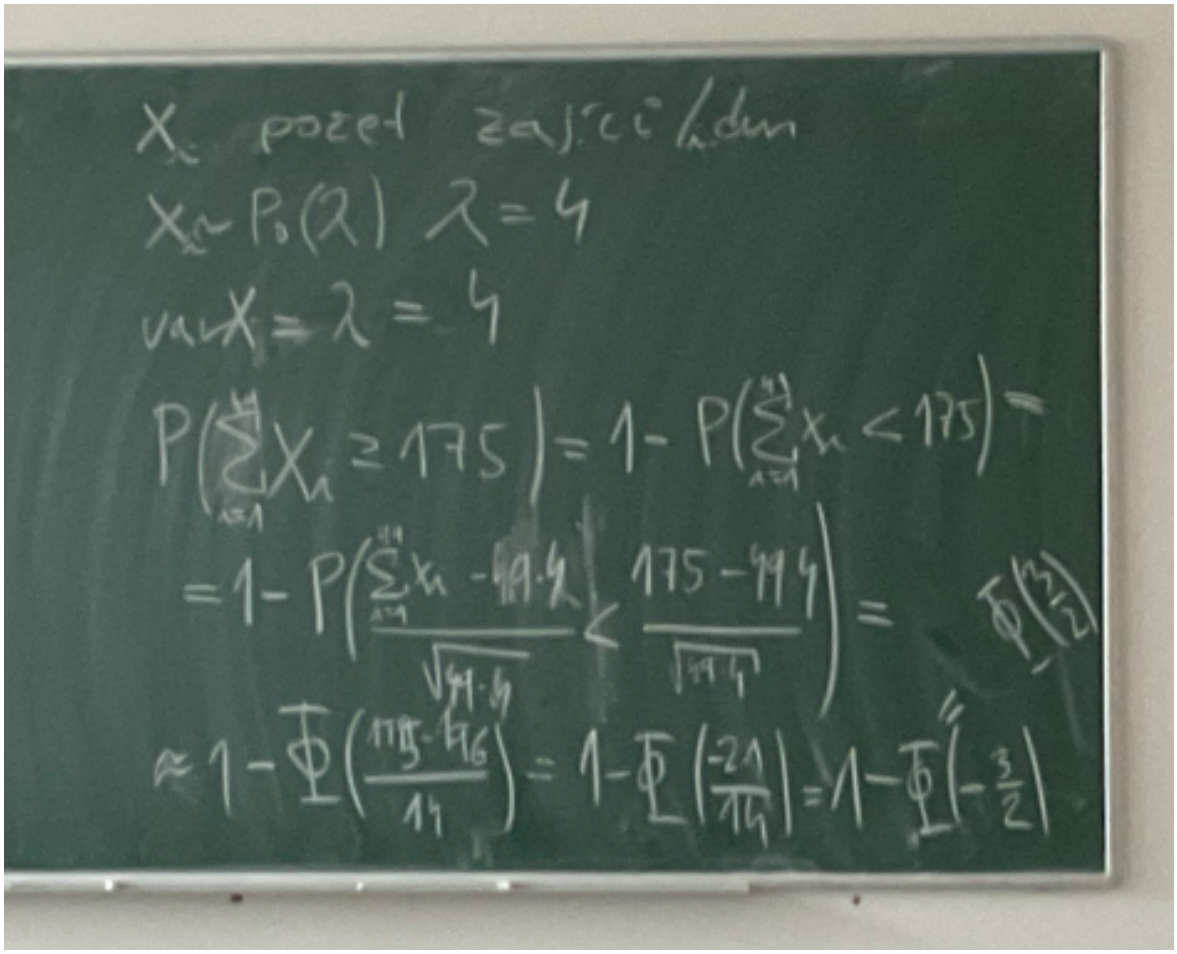
$\mathbb{E}X < +\infty$, $0 < \mathrm{var} < +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{var}X}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0,1)$$

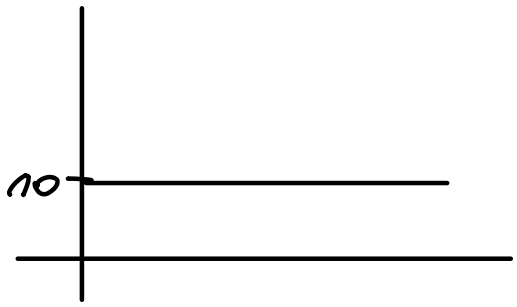
$$\lim_{n \to \infty} F_{Z_n}(x) = \lim_{n \to \infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - \mathbb{E}X\right) \xrightarrow{d} N(0, \mathrm{var}X)$$

$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - \mathbb{E}X\right) \overset{\cdot}{\sim} N(0, \mathrm{var}X)$$


X_i počet zajíců i-tého dne
$X_i \sim Po(\lambda)$ $\lambda = 4$
$var X_i = \lambda = 4$
$P\left(\sum_{i=1}^{44} X_i \geq 175\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{44} X_i < 175\right) =$
$= 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{44} X_i - 44 \cdot 4}{\sqrt{44 \cdot 4}} < \frac{175 - 44 \cdot 4}{\sqrt{44 \cdot 4}}\right) =$
$\approx 1 - \Phi\left(\frac{175 - 176}{14}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-21}{14}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{3}{2}\right)$

X... doba čekání na tramvaj



$$f(x) \begin{cases} x \geq a, x \leq b \\ 0 \quad \text{jinde} \end{cases}$$

$R_0(0,10)$

$X_1, \dots, X_{48} \overset{iid}{\sim} R_0(0,10)$

X_i ... doba čekání na tramvaj

$$\mathbb{E}X = \frac{b-a}{2} = \frac{10-0}{2} = 5$$

$$\operatorname{var} X = \frac{1}{12}(b-a)^2 = \frac{1}{12} \cdot 100 = \frac{25}{30}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{48} X_i \leq 180\right) = P\left(\frac{\sum_{x=1}^{48} -48 \cdot 5}{\sqrt{\frac{25}{3} \cdot 48}} \leq \frac{180 - 48 \cdot 5}{\sqrt{\frac{25}{3} \quad 48}}\right) =$$

$$= P(Z_{48} \leq -3) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3)$$

216 míst

5% nepřijde $\longrightarrow$ 95%

$X_i \sim Alt(0{,}95)$

$$X_i \begin{cases} 1 & \text{itý cestující přijde} \\ 0 & \text{— " — nepřijde} \end{cases}$$

$\mathbb{E}X_i = 0{,}95$

$\operatorname{var} X_i = 0{,}95 \cdot 0{,}05$

$$P\left(\sum_{i=1}^{220} X_i \leq 216\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{220} X_i - 220 \cdot \frac{19}{20}}{\sqrt{220 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}15}} \leq \frac{216 - 220 \cdot \frac{19}{20}}{\sqrt{220 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}}\right) =$$

$= P(Z_{220} \leq 2{,}17) \approx \Phi(2{,}17)$

$P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 216\right) \approx 0{,}9$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\frac{19}{20}}{\sqrt{4 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}} \leq \frac{216 - n\frac{19}{20}}{\sqrt{n \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}}\right) \approx \Phi\left(\frac{216 - n\frac{19}{20}}{\sqrt{4 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}}\right) =$$

$= 0{,}9 \mid \Phi^{-1}$

$$\frac{216 - \frac{n \cdot 19}{20}}{\sqrt{n \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}} = \Phi^{-1}(0{,}9)$$

$X_1 \ldots X_{25} \sim Po(\lambda)$ $\quad EX = X$

$x_1 \ldots x_{17} = 0$

$x_{18} \ldots x_{21} = 1$

$x_{22} = 2$

$x_{23}, x_{24} = 3$

$x_{25} = 5$

(37)

1. 0 1 2 2 3 4 4 6 7

2. 0,2 0,22 0,27 0,55 0,65 1,55 1,38 4,25 6,63 $n = 9$

3. 5,71 8,07 1,27 11,24 11,42 12,62 14,87 17,30 19,23

$$x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

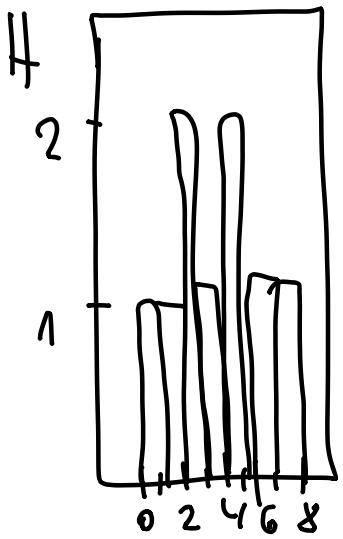
$$\hat{m}_n(\alpha) = \begin{cases} x_{(n\alpha)}, & n\alpha \in \mathbb{N} \\ x_{(\lfloor n\alpha \rfloor + 1)} \end{cases}$$

1. kvartil $= x_3$

medián $= x_5$

3. kvartil $= x_7$

1. interval $\langle 0,1), \langle 1,2) \dots \langle 6,7), \langle 7,8)$



Metodou momentů a metodou maximální věrohodnosti určete parametr λ tohoto Poissonova rozdělení.

Příklad 39: *Doba do poruchy starého výtahu má exponenciální rozdělení. Bylo zjištěno, že se výtah porouchal postupně za 4 dny, 7 dní, 12 dní, 2.5 dne a 24.5 dne. Metodou momentů a metodou maximální věrohodnosti určete parametr λ tohoto exponenciálního rozdělení.*

Příklad 40: *V krabici máme hrací kostky, některé jsou v pořádku a některé falešné. Na falešných padá šestka s pravděpodobností $1/2$, zbývající čísla mají stejnou pravděpodobnost. Opakovaně jsme vytáhli kostku, hodili jí a vrátili ji zpět. Četnost výsledků byla:*

hodnota i	1	2	3	4	5	6
četnost n_i	18	20	12	15	10	25

1. *Odhadněte, kolik procent kostek je falešných,*
   (a) *metodou momentů ,*
   (b) *metodou maximální věrohodnosti.*
2. *Okomentujte stručně, co bychom dostali metodou momentů, kdybychom měli napozorované hodnoty:*

hodnota i	1	2	3	4	5	6
četnost n_i	18	20	12	15	15	20

Příklad 41: *U 64 praktických lékařů byl naměřen výběrový průměr počtu pacientů za den 23, výběrový rozptyl pak byl roven 36, rozdělení počtu pacientů není známé.*

1. *Sestrojte (asymptotický) 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu pacientů.*
2. *Otestujte (pomocí intervalu spolehlivosti) na hladině 5%, zda skutečná střední hodnota počtu pacientů za den může být považována za rovnu 25.*

Příklad 42: *Výrobce tvrdí, že spotřeba jím vyráběného automobilu je 8 l/100km. Průměrná spotřeba u 49 uživatelů ale byla 8.4 l/100km. Naměřen byl dále výběrový rozptyl 2.56. Testujte na hladině 5%, zda měl výrobce pravdu.*

Příklad 43: *Na 100 osobách byla pozorována barva očí a vlasů. Naměřeny byly následující sdružené četnosti:*

oči / vlasy	tmavé	světlé
modré	10	20
zelené/šedé	10	10
hnědé	40	10

Jsou barvy očí a vlasů nezávislé? Testujte na hladině 5%.

Příklad 44: *Firma má tři pobočky. Dva roky bylo sledováno, která z nich zaznamenala nejvyšší měsíční výnos. Bylo zjištěno, že nejvýnosnější byla první pobočka desetkrát, druhá šestkrát a třetí osmkrát. Je možné říct, že první pobočka je nejvýnosnější dvakrát častěji než zbylé dvě? Testujte na hladině 5%.*

Příklad 45: *Pro pojištění motorových vozidel používá pojišťovna tři kategorie pojistného:*
1 - základní pojistné,
2 - bonus 30%,
3 - bonus 50%.
V prvním roce platí pojištěný základní pojistné. Jestliže má rok bezeškodní průběh, je pojištěný v dalším roce zařazen o třídu výše (pokud je to možné), pokud ale uplatní jeden pojistný nárok, je v příštím roce zařazen o kategorii níže (pokud je to možné) a při uplatnění více než jednoho nároku o dvě kategorie níže (pokud je to možné). Počty výskytů pojistné události v jednotlivých letech jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametrem λ.

1. *Určete počáteční rozdělení a matici pravděpodobností přechodu.*

2. *Najděte stacionární rozdělení pro případ, kdy každý řidič hlásí škodu průměrně jednou za 10 let (hodnoty v matici pravděpodobností přechodu zaokrouhlete na jedno desetinné místo, resp. dvě desetinná místa na pozicích $p_{3,1}$ a $p_{3,2}$).*

(42) H_0 $\mu_0 = 8\,l/100\,km$ $x_1, \dots, x_{49}$ ... náh. výběr spotřeb

$\bar{x} = 8{,}4\,l/100km$ $s_n^2 = 2{,}56$ $X \dots N(\mu, \sigma^2)$

$n = 49$

$\alpha = 0{,}05\,\%$

$$\mu_0 \notin \left\langle \bar{x} \pm \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \right\rangle$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0{,}975, 48} = 2{,}011$

$\mu_0 \in \langle 7{,}9 ; 8{,}9 \rangle$ Hypotézu nezamítáme

přes t-statistiku

$$T = \frac{\bar{X} - EX}{S_n} \sqrt{n} \overset{H_0}{\sim} t_{48}$$

$T > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ v $T < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = -t$ $\quad |T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$

$T = 1{,}75$ H_0 nezamítáme

	tmavé 1	světlé 2
1 modré	10	20
2 zelené	10	10
3 hnědé	40	10

$n = 100$

$\alpha = 5\,\%$

X ... barva očí

Y ... barva vlasů

H_0 X a Y jsou NZ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_i n_j}{n}\right)^2}{\frac{n_i n_j}{n}} = 18$$

$5{,}992$

1. pob. 10x
2. pob. 6x
3. pob. 8x

$p_1 = 2p_2 = 2p_3$ $\quad p = (p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$H_0: p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$H_A: p \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

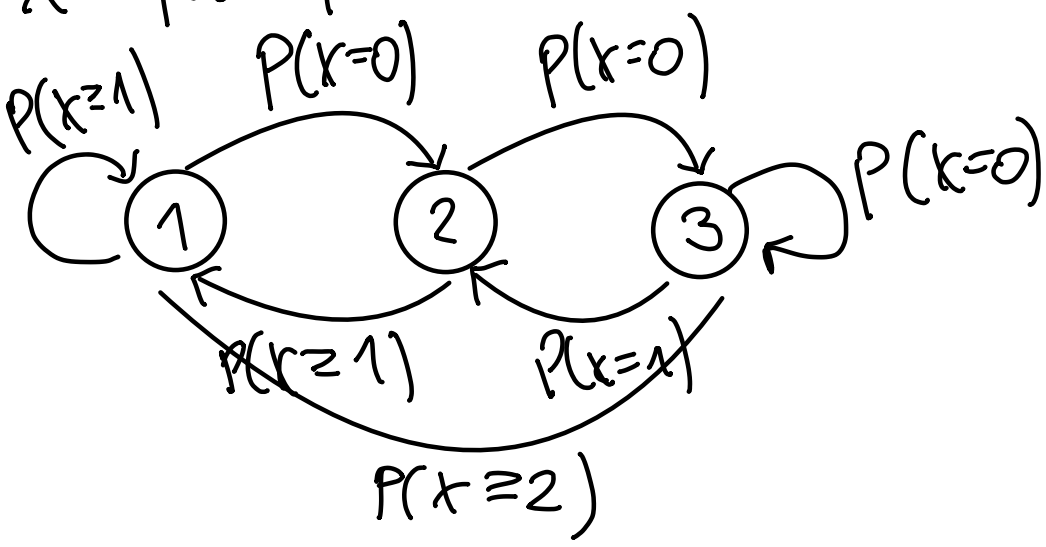
$$\chi^2 = \sum \frac{(x_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(6-6)^2}{6} + \frac{(8-6)^2}{6} = \frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 1$$

$$X = (X_1, X_2, X_3) \sim Mult_3(24, p = (p_1, p_2, p_3))$$

$\chi^2_{1-\alpha, k-1}$

$\chi^2_{0,95; 2}$

(45) X... počet pojistných za rok



$$P = \begin{pmatrix} P(X\geq 1) & P(X=0) & 0 \\ P(X\geq 1) & 0 & P(X=0) \\ P(X\geq 2) & P(X=1) & P(X=0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-(1+\lambda)e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$P(X=0) = e^{-\lambda} = e^{-0,1}$$

$$P(X=1) = \lambda e^{-\lambda} =$$

$$P(X\geq 1) = 1 - e^{-\lambda} =$$

$$P(X\geq 2) = 1 - (1+\lambda)e^{-\lambda} =$$

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0,01 & 0,09 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = 0{,}1 \cdot \pi_1 + 0{,}1\pi_2 + 0{,}01\pi_3$$
$$\pi_2 = 0{,}9 \cdot \pi_1 + 0{,}09\pi_3$$
$$\pi_3 = 0{,}9\pi_2 + 0{,}9\pi_3 \qquad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

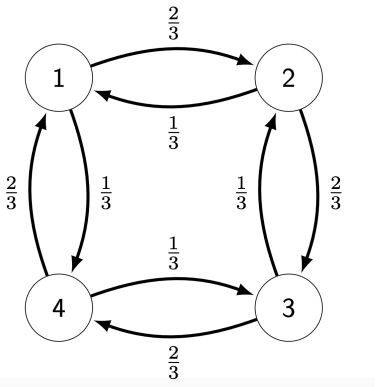
$$\begin{pmatrix} -90 & 10 & 1 \\ 90 & -100 & 9 \\ 0 & 90 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}01 \\ 0{,}9 & -1 & 0{,}09 \\ 0 & 0{,}9 & -0{,}1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}01 \\ 0 & -0{,}9 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}9 & -0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$-0{,}9\pi_2 + 0{,}1\pi_3 = 0$$
$$\pi_3 = 9\pi_2$$
$$-0{,}9\pi_1 + 0{,}1\pi_2 + 0{,}09\pi_2 = 0$$
$$\pi_1 = \frac{19}{90}\pi_2$$

$$\frac{19}{90}\pi_2 + \pi_2 + 9\pi_2 = 1$$
$$\frac{919}{90}\pi_2 = 1$$
$$\pi_2 = \frac{90}{919}$$

Příklad 46: *Markovský řetězec je dán grafem:*



1. *Napište matici pravděpodobností přechodu, klasifikujte stavy a stanovte všechny komponenty.*

2. *Stanovte pravděpodobnosti přechodu ze stavu* 1 *do stavu* 4 *po právě* 3 *krocích.*

3. *Popište markovský řetěz, který vznikne aplikováním d kroků, kde d je perioda původních stavů.*

4. *Najděte stacionární rozdělení.*

5. *Konverguje rozdělení stavů ke stacionárnímu? Za jakých podmínek? Odůvodněte.*

6. *Stanovte rozdělení pravděpodobností stavů po 1000 krocích, pokud jsme vyšli ze stavu 1.*

Příklad 47: *Markovský řetězec má matici pravděpodobností přechodu*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

1. *Klasifikujte všechny stavy.*

2. *Najděte všechny uzavřené množiny stavů.*

3. *Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.*

4. *Odhadněte stav ve výchozím čase t, víte-li, že v čase $t+2$ byl řetězec ve stavu 2.*

Příklad 48: *Z pozorované posloupnosti stavů $(2, i, k, 3)$ odhadněte stavy i a k markovského řetězce s maticí pravděpodobností přechodu*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 49: *Markovský řetězec má dva stavy 1 a 2. Pravděpodobnost přechodu ze stavu 1 do stavu 2 je p, pravděpodobnost přechodu ze stavu 2 do stavu 1 je q. Z pozorované posloupnosti stavů*

$$(1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$$

odhadněte parametry p, q.

Příklad 50: *Alice trefí terč s pravděpodobností $1/3$, Bob s pravděpodobností $1/2$. Pokud hráč zasáhne terč, střílí dále, pokud mine, je na řadě druhý hráč. Začíná Alice. Alice vyhrává, pokud trefí terč $2\times$ za sebou, Bob vyhrává, pokud trefí terč $3\times$ za sebou. Pro oba hráče stanovte pravděpodobnosti výhry.*