

Úloha 1. Call-centrum jisté firmy přijme v průměru 30 hovorů za hodinu. Hovory jsou vzájemně nezávislé. 60% lidí, kteří volají do centra, jsou muži. Stý člověk, který se dovolá do centra, získá od firmy speciální odměnu. Použitím CLV spočtěte pravděpodobnost, že

1. mezi 150 lidmi volajícími do centra je nejvýše 75 mužů, (2 body)
2. doba čekání na volajícího, který(zá) získá odměnu, je nejméně 3 hodiny. (2 body)

1.) X_1, \dots, X_{150}

$$X_i \begin{cases} 1, & i\text{-tý volající je muž} \\ 0, & i\text{-tý volající je žena} \end{cases}$$

$$X_i \sim \text{Alt}(0, 1)$$

$$\mathbb{E}X = 0,6, \quad \text{var}X = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{150} X_i \leq 75\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{150} X_i - 150 \cdot 0,6}{\sqrt{150 \cdot 0,24}} \leq \frac{75 - 150 \cdot 0,6}{\sqrt{150 \cdot 0,24}}\right)$$

$$\approx \bar{\Phi}(-2,5) = 1 - \bar{\Phi}(2,5)$$

2.) $Y_i = \exp(\lambda) \dots$ doba čekání mezi $(i-1)$ tým a i -tým hovorem

$$\mathbb{E}Y = 2[\text{min}] \quad \lambda = 1/2$$

$$\text{var}Y = 4$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i \geq 180\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} Y_i - 100 \cdot 2}{\sqrt{100 \cdot 4}} \geq \frac{180 - 100 \cdot 2}{\sqrt{100 \cdot 4}}\right) =$$

$$= P(\dots \geq -1) = 1 - P(\dots \leq -1) \approx 1 - \bar{\Phi}(-1) = \bar{\Phi}(1)$$

Úloha 2. Pojišťovna sledovala škody na rodinných domech způsobené požárem. Výše celkového ročního pojistného plnění (tj. celkové platby klientům, kteří utrpěli škody) za posledních pět let byly (uváděno v milionech eur): 2; 2,5; 1; 10; 5. Předpokládejme, že hustota náhodné veličiny X popisující roční pojistné plnění (v milionech eur) je

$$f(x) = a^2 x e^{-ax} \quad \text{pro } x > 0 \quad (\text{jinak } f(x) = 0).$$

Odhadněte parametr a

1. metodou momentů, (2 body)
2. metodou maximální věrohodnosti. (2 body)

$$(1) \quad \mathbb{E}X = \int_0^\infty x a^2 x^2 e^{-ax} dx = \left| \begin{array}{l} t = ax \\ dt = a dx \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt$$

$\mathbb{E}X^2, X \sim \text{Exp}(2)$

$$\mathbb{E}(x - \mathbb{E}x)^2 = \mathbb{E}(x^2) - (\mathbb{E}x)^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{5} \cdot (2 + 2,5 + 1 + 10 + 5) = 4,1$$

$$\mathbb{E}X = \frac{2}{a} \Rightarrow a = \frac{2}{\mathbb{E}X}$$

$$\hat{a} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2}{4,1} = \frac{20}{40}$$

MLE: $L(\vec{x}, a) = \prod_{i=1}^5 a^2 x_i e^{-ax_i} = (a^2)^5 e^{-a \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right)} \prod_{i=1}^5 x_i$

$$\ell(\vec{x}, a) = \ln(L(\vec{x}, a)) = 10 \ln(a) - a \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right) + \ln \prod_{i=1}^5 x_i$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = \frac{10}{a} - \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{10}{a} - 20,5 = 0$$