Pravděpodobnost a statistika - bodovací test 7. 11. 2022

Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	Celkem
Jakub Pelc	Leseda	?	?	2?

Úloha 1. Na sportovním soustředění jistého oddílu je 24 volejbalistů a 16 stolních tenistů. Pravděpodobnost, že náhodně vybraný sportovec splní stanovený limit 50 kliků za minutu, je $3/4$, přičemž volejbalista tento limit splní s pravděpodobností $5/6$. Sportovci zkoušejí splnit limit v náhodném pořadí, vzájemně nezávisle na sobě i na předešlých pokusech, přičemž počet pokusů každého sportovce je neomezený. Průměrně zkouší splnit limit 10 sportovců během jednoho tréninkového dne. Spočtěte pravděpodobnost, že

1. náhodně vybraný sportovec, který splní limit, je stolní tenista, (1 bod)
2. nejpozději čtvrtý sportovec, který zkouší splnit limit, je volejbalista, (1 bod)
3. během dvou tréninkových dnů zkusí splnit limit nejvýše tři stolní tenisti, (1 bod)
4. na sportovce, který se pokusí splnit limit, budeme čekat alespoň půl tréninkového dne. (1 bod)

Úloha 2. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{8}x & , x \in \langle -1,\, 1) \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{4}x & , x \in \langle 1,\, 2) \\ \frac{3}{4} & , x \in \langle 2,\, 3) \\ 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{3-x} & , x \in \langle 3, \infty) \end{cases}$$

1. Určete $P(1 < X < 2)$ a $P(1 \leq X \leq 2)$. (1 bod)
2. Vyjádřete X jako směs $X = Mix_c(D, S)$ náhodných veličin D a S, kde D je diskrétní a S spojitá, tj. určete konstantu c a pak popište rozdělení pravděpodobnosti pro D (pravděpodobnostní funkcí $P(D = k) = ...$ pro $k = ...$) a pro S (hustotou $f(x)$). (3 body)

(1) 24 volejbalistů
16 tenistů

$P(\text{volejbalista}) = \frac{24}{40} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \underline{\underline{3/5}}$

$P(\text{tenista}) = \frac{16}{40} = \underline{\underline{2/5}}$

$P(\text{úspěch}) = 3/4$ 10 sportovců za den

$P(\text{úspěch} \mid \text{volejbalista}) = 5/6$

(a) $P(\text{tenista} \mid \text{úspěch}) = ?$

$= 1 - P(\text{volejbalista} \mid \text{úspěch}) = 1 - \frac{P(\text{úspěch} \mid \text{volejbalista}) \cdot P(\text{vol.})}{P(\text{úspěch})} =$

$= 1 - \frac{5/6 \cdot 3/5}{3/4}$

(b) Y... počet sportovců před prvním volejbalistou

$Y \sim \text{Geom}(p) \quad p = 3/5 \quad P[Y=k] = (1-p)^k (p)$

$P[Y \leq 3] = P[Y=0] + P[Y=1] + P[Y=2] + P[Y=3] =$

$=$

(c) Z... počet tenistů, kteří splní limit během 2 dnů

$Z \sim Po(\lambda)$ 10/den tzn. průměrně
$2/5 \cdot 20$ tenistů za den dnes

$EZ = 8 = \lambda$ $\frac{40}{5} = 8$

$$P[Z \le 3] = P[Z=0] + P[Z=1] + P[Z=2] + P[Z=3] =$$

$$= \frac{8^0}{0!} e^{-8} + \frac{8^1}{1!} e^{-8} + \frac{8^2}{2!} e^{-8} + \frac{8^3}{3!} e^{-8}$$

(d) A... doba čekání na sportovce, který se pokusí splnit limit

$A \sim Exp(\lambda)$

$EA = 1/\lambda = 1/10$ hve

$$P[A \ge 1/2] = 1 - P[A \le 1/2] = 1 - F_A(1/2)$$

$$F_A = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$1 - \left(1 - e^{-\lambda \cdot 1/2}\right) = 1 - e^{-1/20}$$

nebo Poisson:

B... počet sportovců za 0,5 hve $\sim Po(5)$ $P(Y=k) = \frac{5^k}{k!} e^{-5}$ pro $k = 0, 1, \ldots$

$P(Y=0) = \underline{\underline{e^{-5}}}$

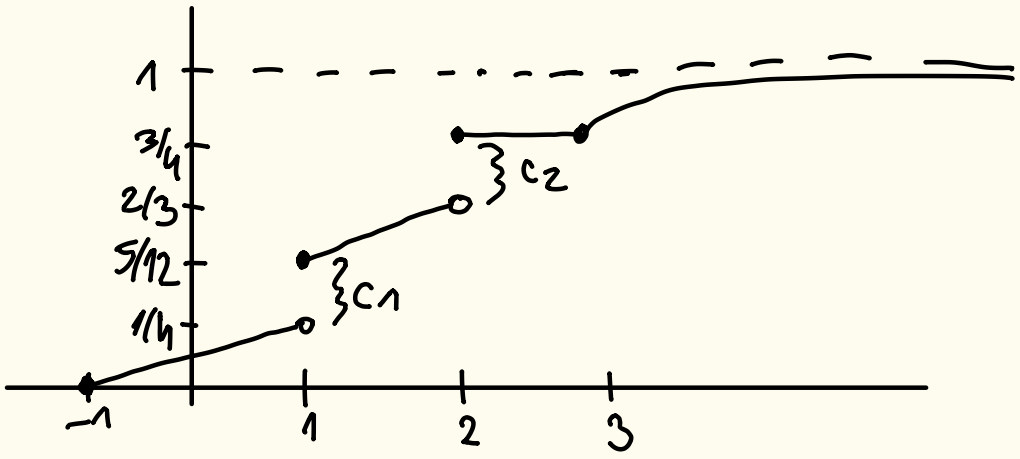
(2)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1) \\ 1/8 + 1/8\,x, & x \in \langle -1, 1) \\ 1/6 + 1/4\,x, & x \in \langle 1, 2) \\ 3/4, & x \in \langle 2, 3) \\ 1 - 1/4\,e^{3-x}, & x \in \langle 3, \infty) \end{cases}$$

$1/6 + 1/4 \cdot 1 = \frac{5}{12}$

$1/6 + 1/2 = \frac{4}{6} = 2/3$

$1/8 + 1/8 = 2/8 = 1/4$



$c_2 = 9/12 - 8/12 = 1/12$

$c_1 = 5/12 - 1/4 = 5/12 - 3/4 = -2/12 = 1/6$

$c = c_1 + c_2 = 3/12 = 1/4$ (*)

(a)

$$P(1 < X < 2) = \lim_{x \to 2^-} (F_X(x)) - F_X(1) =$$

$$= 2/3 - 5/12 = 8/12 - 5/12 = 3/12 = 1/4$$

$$P(1 \le X \le 2) = F_X(2) - \lim_{x \to 1^-} (F_X(x)) = 3/4 - 1/4 = 2/4 = 1/2$$

(b) $X = \mathrm{Mix}_c(D, S)$ $\quad c = 1/4$ (*)

Popis D: $P(D=1) = \frac{(5/12 - 1/4)}{1/4} = 2/3$

$P(D=2) = \frac{(3/4 - 2/3)}{1/4} = 1/3$

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 2/3 & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

Popis S: $F_X(x) = 1/4\, F_D(x) + 3/4\, F_S(x)$

$$F_S(x) = \frac{4}{3} F_X(x) - 1/3\, F_D(x) \qquad F_D(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 1) \\ 2/3 & x \in \langle 1, 2) \\ 1 & x \in \langle 2, \infty) \end{cases}$$

Potom:

$$F_S(x) \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -1) \\ 1/6 + 1/6\, x + 0 & x \in \langle -1, 1) \\ 1/3\, x & x \in \langle 1, 2) \\ 1 - 1/3 = 2/3 & x \in \langle 2, 3) \\ 1 - 1/3\, e^{3-x} & x \in \langle 3, \infty) \end{cases}$$

↓ derivuji

$$\left(-1/3\, e^{3-x}\right)' = -1/3\, e^{3-x}(-1) = 1/3\, e^{3-x}$$

Potom:

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1/6 & -1 \le x < 1 \\ 1/3 & 1 \le x < 2 \\ 0 & 2 \le x < 3 \\ 1/3\, e^{3-x} & x = 3 \end{cases}$$