Úloha 1. Hokejisté jistého týmu vyšlou během utkání (hraného pouze na tři třetiny, tj. bez prodloužení; třetina trvá 20 minut) na branku průměrně 36 střel. Průměrně každá devátá střela skončí gólem. Tým má tři formace, které se na ledě střídají rovnoměrně, vždy po několika vteřinách hry. Druhá formace střílí 1,5-krát častěji než třetí formace a první formace střílí dokonce dvakrát častěji než třetí formace. První formace má úspěšnost 15 % a druhá 10 %. Všechny střely, resp. góly, přicházejí zcela nezávisle na sobě i na předešlých střelách, resp. gólech. Určete pravděpodobnost, že

1. pokud padl gól, vstřelil ho hráč třetí formace,
2. během první třetiny vstřelí tým alespoň dva góly,
3. na další gól tohoto týmu budou diváci čekat alespoň 10 hracích minut,
4. nejpozději pátá střela skončí gólem.

Úloha 2. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{6} & , x \in \langle 0, 1) \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(x-1)^2 & , x \in \langle 1, 2) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x & , x \in \langle 2, 4) \\ 1 & , x \in \langle 4, \infty) \end{cases}$$

1. Určete $P(1 < X < 3)$ a $P(1 \leq X \leq 3)$.
2. Vyjádřete X jako směs $X = Mix_c(D, S)$ náhodných veličin D a S, kde D je diskrétní a S spojitá, tj. určete konstantu c a pak popište rozdělení pravděpodobnosti pro D (pravděpodobnostní funkci $P(D = ...) = ...$) a pro S (hustotu $f(x)$).

Úloha 1 (1) průměrně 36 střel

$P(\text{gól}) = 1/9$ $\quad P(\text{gól} \mid \text{první formace}) = 0.15$

$P(\text{gól} \mid \text{druhá formace}) = 0.1$

$P(\text{třetí formace} \mid \text{gól}) = ? = (*)$

1. formace $= 2x$
2. formace $= 1{,}5x$
3. formace $= x$

$2x + 1{,}5x + x = 36$

$4{,}5x = 36$

$x = 8$

$P(1.f) = \frac{4}{9}\left(= \frac{16}{36}\right)$ $\quad P(2.f) = \frac{12}{36} = 1/3$

$P(3.f) = \frac{2}{9}\left(= \frac{8}{36}\right)$

↓

pravděpodobnost střelby 1. formace

(*) $P(3.\text{f} \mid \text{gól}) = 1 - \left(P(1.\text{f} \mid \text{gól}) + P(2.\text{f} \mid \text{gól})\right) =$

$$= 1 - \left(\frac{P(\text{gól} \mid 1.\text{f}) P(1.\text{f})}{P(\text{gól})} + \frac{P(\text{gól} \mid 2.\text{f}) \, P(2.\text{f})}{P(\text{gól})} \right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{0.15 \cdot 4/9}{1/9} + \frac{0.1 \cdot 1/3}{1/9} \right) =$$

$$= 1 - \left(0{,}15 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 3 \right) =$$

$$= 1 - \left(0{,}6 + 0{,}3 \right) = \underline{\underline{0{,}1}}$$

(2) X ... počet gólů v první třetině

$$EX = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = \lambda$$

$$X \sim Po(\lambda) \qquad P[X=k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - P[X=0] - P[X=1] =$$

$$= 1 - \frac{\lambda^0 e^{-4/3}}{1} - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1} = 1 - e^{-4/3} - 4/3 e^{-4/3} =$$

$$= \underline{\underline{0{,}385}}$$

(3.) Y ... doba čekání na gól

$Y \sim Exp(\lambda)$ $\quad \frac{36}{9} = \frac{12}{3} = 4 \quad \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$

$\lambda = 1/15$ [gólů/min]

$F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$

otherwise

$$1 - P[Y \leq 10] = 1 - \left(1 - e^{-10\lambda}\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{10}{15}}\right) =$$

$$=$$

(4) Z ... počet stel před prvním gólem

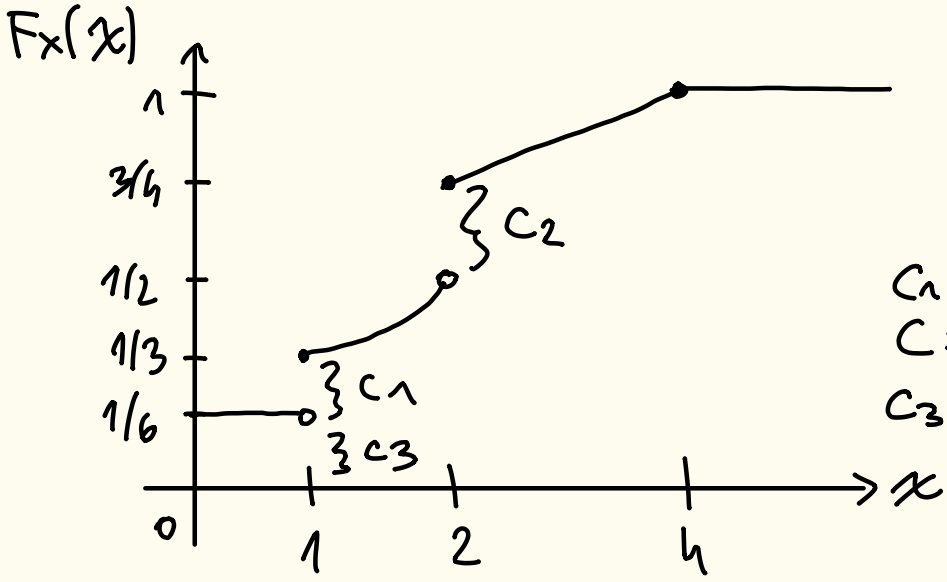
$Z \sim Geom(1/9) \quad P[Z = k] = (1-p)^k p$

$P[Z \leq 4] = \quad p = 1/9$

$= P[Z = 0] + \dots + P[Z = 4]$

Úloha 2

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1/6 & x \in \langle 0, 1) \\ 1/3 + 1/6\,(x-1)^2 & x \in \langle 1, 2) \\ 1/2 + 1/8\,x & x \in \langle 2, 4) \\ 1 & x \in \langle 4, \infty) \end{cases}$$



$1/3 \quad 1/3 + 1/6 = 3/6 = 1/2$

$1/2 + 1/4 = 3/4 \quad 1/2 + 1/2 = 1$

$c_1 = 1/3 - 1/6 = 1/6$

$c_2 = 3/4 - 1/2 = 1/4$ $\Big\} = 2/12 + 3/12 =$

$c_3 = 1/6 \qquad c = 7/12$

(**)

1.) $P(1 < X < 3) = \lim_{x \to 3^-} F_X(x) - F_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{3} =$

$= \frac{9+12-8}{24} = \frac{13}{24}$

$P(1 \le X \le 3) = F_X(3) - \lim_{x \to 1^-} F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{6} =$

$= \frac{9+12-4}{24} = \frac{17}{24}$

2.) $X = \mathrm{Mix}_c(D, S) \qquad c = 7/12$ viz (**)

Diskrétní:

$P(X=0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{7} \approx \frac{2}{7}$

$P(X=1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{7} \approx \frac{2}{7}$

$P(X=2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{7} = \frac{3}{7}$

$$F_D = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{2}{7} & x \in \langle 0, 1) \\ \frac{1}{7} & x \in \langle 1, 2) \\ 1 & x \in \langle 2, \infty) \end{cases}$$

Spojité: $F_X(x) = c \cdot F_D(x) + (1-c) F_S(x)$

$F_X(x) = \frac{7}{12} \cdot F_D(x) + \frac{5}{12} F_S(x)$

$F_S(x) = \frac{12}{5}\left(F_X(x) - \frac{7}{12} F_D(x)\right)$

$F_S(x) = \frac{12}{5} F_X(x) - \frac{7}{5} F_D(x)$

čili:

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 0 & x \in \langle 0, 1) \\ \frac{2}{5}(x-1)^2 & x \in \langle 1, 2) \\ \frac{3}{10}x - \frac{1}{5} & x \in \langle 2, 4) \\ 1 & x \in \langle 4, \infty) \end{cases}$$

potom

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{4}{5}x - \frac{4}{5} & x \in \langle 1, 2) \\ \frac{3}{10} & x \in \langle 2, 4) \\ 0 & x \in \langle 4, \infty) \end{cases}$$