V ZOO jsou dva druhy tučňáků - tučňák Humboldtův a tučňák brýlový, přičemž Humboldtových je dvakrát víc než brýlových. Průměrně jednou za dvě minuty projde nějaký tučňák otvorem z venkovního výběhu do vnitřního. Tučňáci procházejí otvorem nezávisle na sobě. Ve vnitřním výběhu pak tučňák Humboldtův skočí do jezírka s pravděpodobností 0,75 a tučňák brýlový s pravděpodobností 0,7. Se zbylou pravděpodobností se tučňáci po chvilce vrátí do venkovního výběhu. Určete pravděpodobnost, že

1. první tučňák, který skočí do jezírka, bude tučňák Humboldtův,
2. nejpozději čtvrtý tučňák, který projde otvorem dovnitř, bude tučňák Humboldtův,
3. na příštího tučňáka, který projde otvorem dovnitř, budeme čekat alespoň pět minut,
4. během deseti minut projdou otvorem dovnitř alespoň tři tučňáci brýloví.

(1) je 1 brýlových a 2 Humboldtových

$P(J|H) = 0{,}75$

$P(J|B) = 0{,}7$

$P(H) = 2/3 \quad P(B) = 1/3$

$$P(H|J) = \frac{P(J|H)\,P(H)}{P(J|H)\cdot P(H) + P(J|B)\cdot P(B)} = \frac{0{,}75 \cdot 2/3}{0{,}75 \cdot 2/3 + 0{,}7 \cdot 1/3} =$$

tučňák \ akce	jezírko	výběh	
H	15	5	20
B	7	3	10
celk.	22	8	30

$= \frac{15}{22}$

(2) $X \sim$ počet tučňáků před prvním Humboldtovým

$P(H) = 2/3$

$X \sim Geom(2/3) \qquad P[X=k] = p(1-p)^k$

nejpozději čtvrtý

$$P[X \leq 3] = \sum_{i=0}^{3} P[X=i] = \sum_{i=0}^{3} p(1-p)^i = p \sum_{i=0}^{3} (1-p)^i =$$

$$= p \cdot \frac{1-(1-p)^4}{1-(1-p)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-(\frac{1}{3})^4}{\frac{2}{3}} = 0{,}987$$

(3) na příštího tučňáka, který projde otvorem dovnitř budeme čekat alespoň 5 minut

lze dvěma způsoby

(a) X ... počet tučňáků za 5 minut

$X \sim Po(\lambda)$ průměrně vnitř jednou za dvě minuty projde tučňák

proto $EX = 2{,}5$ (tučňáků za 5 minut)

$\lambda = 2{,}5$

$$P[X=k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

ptáme se na $P[X=0] = \frac{e^{-2{,}5} \cdot 1}{1} = e^{-2{,}5}$ $(\approx 0{,}082)$

(b) Y ... doba čekání na tučňáka

$Y \sim Exp(\lambda)$ $EX = 0{,}5$ tučňáka / minutu

$\lambda = 1/2$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P[Y > 5] = 1 - P[Y \leq 5] = 1 - \left(1 - e^{-1/2 \cdot 5}\right) =$$

$$= e^{-\frac{5}{2}} = e^{-2{,}5} \quad (\approx 0{,}082)$$

(4) během deseti minut projdou dvanitv alespoň 3 tučňáci bryčlou

X... počet tučňáků v 5 pokusech (průměrně 5 tučňáků / 10 min)

$X \sim Binom(n,p)$ $n=5$ $p=\frac{1}{3}$ $P[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pro $k=0,\dots,n$

$P[X \geq 3] = P[X=3] + P[X=4] + P[X=5] =$

$= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0 =$

$= 10\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{4}{9} + 5\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{243} = \frac{17}{81} \quad (\approx 0{,}21)$

X... počet tučňáků B za 10 minut

$X \sim Po(\lambda)$ $\lambda = 5\cdot 1/3 = 5/3$ $P[X=k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

$P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \left(P[X=0] + P[X=1] + P[X=2]\right) =$

$= 1 - e^{-5/3}\left(1 + \frac{5}{3} + \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{2}\right) \quad (\approx 0{,}23)$

V populaci trpí 3% jistou chorobou A. Vyšetření na chorobu A uměže výsledek správně v 70% případů pokud člověk chorobou A trpí a v 90%, pokud je netrpí.

(a) Náhodně zvolíme člověka a vyšetříme jej na chorobu A. Jaká je pst., že test vyjde pozitivně.

$P(A) = 0{,}03 \qquad P(T|A) = 0{,}7 \quad (T$ → test pozitivní$) \qquad P(T^c|A^c) = 0{,}9$

$P(T|A^c) = 0{,}1$

$$P(T) = P(T \cap A) + P(T \cap A^c) =$$

$$= P(T|A)P(A) + P(T|A^c)P(A^c) =$$

$$= P(T|A)P(A) + P(T|A^c)(1 - P(A)) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}03 + 0{,}1 \cdot 0{,}97 = \underline{\underline{0{,}118}}$$

Úloha 1. (celkem 50 bodů)
Na akci pořádané jistou zoologickou zahradou u příležitosti Dne dětí dostávají děti odměnu za splnění úkolu formou žetonu do automatu. Po vhození žetonu jim vždy vypadne lízátko, bonbón nebo žvýkačka, přičemž tyto sladkosti jsou v automatu v poměru 1:2:2. Každá sladkost je v obalu buď se slonem nebo s žirafou nebo s tučňákem, přičemž obaly na lízátka tvoří ze 40% sloni a z 20% žirafy, obaly na bonbóny tvoří ze 30% sloni a ze 40% žirafy a obaly na žvýkačky tvoří z 25% sloni a z 25% žirafy. K automatu si přichází vybrat odměnu průměrně jedno dítě za tři minuty. Děti přicházejí k automatu nezávisle na sobě. Do automatu jsou stále doplňovány sladkosti tak, aby byl zachován poměr mezi druhy sladkostí uvedený výše. Spočtěte pravděpodobnost, že

a) příští vydaná sladkost bude v obalu s tučňákem, (5 bodů)

b) příští vydaná sladkost v obalu s tučňákem bude lízátko, (5 bodů)

c) příští vydané lízátko bude v obalu s tučňákem, (5 bodů)

d) na vydání příští žvýkačky budeme čekat nejvýše 10 minut, (7 bodů)

e) během 15 minut vydá automat nejvýše tři sladkosti, přičemž žádná z nich nebude v obalu s žirafou, (7 bodů)

f) mezi čtyřmi vydanými odměnami bude nejvýše jedno lízátko, (7 bodů)

g) nejpozději čtvrtá vydaná sladkost bude bonbón, (7 bodů)

h) je-li nyní v automatu 100 sladkostí a doplňování automatu se zaseklo, vydrží i tak automat vydávat odměny ještě alespoň čtyři hodiny. (Řešte pomocí CLV; 7 bodů)

$P(L) = 1/5$ $P(B) = 2/5$ $P(Z) = 2/5$ $P(T_L) = 0{,}4$ $P(T_B) = 0{,}3$ $P(T_Z) = 0{,}5$

a) $P(T) = P(L \cap T_L) + P(B \cap T_B) + P(Z \cap T_Z) =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{25} + \frac{6}{50} + \frac{2}{10} =$

$= \frac{4+6+10}{50} = \frac{20}{50} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$

$P(S|L) = 0{,}4$ $P(S|B) = 0{,}3$ $P(S|G) = 0{,}25$

$P(\check{Z}|L) = 0{,}2$ $P(\grave{Z}|B) = 0{,}4$ $P(\hat{Z}|G) = 0{,}25$

$P(T|L) = 0{,}4$ $P(T|B) = 0{,}3$ $P(T|G) = 0{,}5$

$0{,}8$ $0{,}6$ $0{,}75$

b) $P(L|T) = \frac{P(T|L)P(L)}{P(T)} = \frac{2/5 \cdot 1/5}{2/5} = \underline{\underline{1/5}}$

c) $P(T|L) = 0{,}4$

d) X ... doba čekání na vydání lístečku

$X \sim Exp(\lambda)$ 1/3 dítěte / minutu 2/5 žen

$P(X \leq 10) = F_X(10) = 1 - e^{-2/15 \cdot 10}$ = podobo 2/15 žen / minutu

$\lambda = 2/15$

$= 1 - e^{-4/3}$ $(\approx 0{,}73)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

e) Y ... počet skladbistů s oběma jízdními než žirafa za 15 min

$Y \sim Po(\lambda)$ $\quad$ 1/3 skladbistů / min $\longrightarrow$ 5 skladbistů za 15 min

$Y \sim Po(\frac{7}{2})$

$$P(\bar{Z}) = P(L)P(\bar{Z}|L) + P(B)P(\bar{Z}|B) + P(G)P(\bar{Z}|G) =$$
$$= 1/5 \cdot 1/5 + 2/5 \cdot 2/5 + 2/5 \cdot 1/4 =$$
$$= \frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{2}{20} = \frac{4+16+10}{100} = \frac{30}{100} = 0.3$$

$$1 - P(\bar{Z}) = 0,7 = \frac{7}{10}$$

$$\frac{7}{10} \cdot 5 = \frac{7}{2} \longrightarrow \text{skladbistů bez žirafy}$$

$$\lambda = \frac{7}{2} \qquad P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$P(X \leq 3) = e^{-\frac{7}{2}}\left(1 + \frac{7}{2} + \frac{(\frac{7}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{7}{2})^3}{6}\right) (\approx 0,53)$$

---

f) Z ... počet lízátek ve 4 vydaných bonbónech

$Z \sim Binom(n,p)$ $\quad n=4$ $\quad p=\frac{1}{5}$ $\quad P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$P(Z \leq 1) = P(Z=0) + P(Z=1) = 1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 + 4 \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^3 (\approx 0,82)$$

g) X ... počet skladbistů před prvním bonbónem

$X \sim Ge(\lambda)$ $\quad \lambda = \frac{2}{5}$ $\quad P(X=k) = p(1-p)^k$

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$$
$$= (1-p)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^4 (\approx 0,1296)$$