Úloha 1. (celkem 51 bodů)
Telefon v jistém call-centru je vybavený zábavným doplňkem - krabicí, v níž jsou kuličky červené, modré nebo bílé barvy ze tří různých materiálů - skleněné, dřevěné a hliněné - a v různých velikostech. Vždycky, když zazvoní telefon, vypadne náhodně vybraná kulička. Tu operátoři po zvednutí telefonu vrátí zpět do krabice. Červených kuliček je v krabici polovina, z nichž 40% je skleněných a 40% je dřevěných. Modrých kuliček je v krabici 30%, z nichž 1/6 je skleněných a 1/3 dřevěných. Z bílých kuliček je pak 1/4 skleněných a 1/4 dřevěných. Průměr kuličky [v cm] je náhodná veličina s rozdělením $Ro(2,4)$, která je nezávislá jak na barvě, tak na materiálu kuličky. Telefon zazvoní průměrně čtyřikrát za 10 minut. Určete pravděpodobnost, že

a) při zazvonění telefonu vypadne kulička, která je modrá nebo hliněná (6 bodů)

b) vypadne-li skleněná kulička, bude červená, (5 bodů)

c) náhodně vypadnutá kulička je bílá a zároveň má v průměru alespoň 3,5 cm, (5 bodů)

d) na příští vypadnutí kuličky budeme čekat alespoň tři minuty, (7 bodů)

e) během pěti minut vypadnou z krabice nejvýše dvě červené kuličky, (7 bodů)

f) nejpozději pátá vypadnutá kulička je hliněná, (7 bodů)

g) mezi prvními pěti vypadnutými kuličkami jsou alespoň dvě dřevěné červené kuličky, (7 bodů)

h) pokud by operátoři kuličky do krabice nevraceli, nýbrž vždy po vypadnutí je navlékali na nit těsně za sebou tak, aby středy kuliček ležely v jedné přímce, vešla by se řada 75 kuliček na nit dlouhou 2,3 m (řešte pomocí CLV; 7 bodů).

S	D	H
1/6	1/3	1/2

$P(B) = 1/5$

$P(H|B) = 1/2$

$P(\check{C}) = 1/2$

$P(H|\bar{C}) = 1/5$

$P(M) = 3/10$

$P(H|M) = 1/2$

$P(S|\bar{C}) = 2/5$

(a) $P(M \vee H) = P(M) + P(H) - P(M \wedge H)$

$P(M) = 0{,}3$

$P(M \wedge H) = P(M) \cdot P(H|M)$ ← podm. pravd.

$P(H) = P(M \wedge H) + P(\bar{C} \wedge H) + P(B \wedge H) =$

$= 3/10 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/5 + 1/5 \cdot 1/2 =$

$= \frac{3}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3+2+2}{20} = \frac{7}{20}$

$P(M \vee H) = P(M) + P(H) - P(M|H)P(M) =$

$= 3/10 + 7/20 - 1/2 \cdot 3/10 = \underline{\underline{1/2}}$

(b) $P(\bar{C}|S) = \frac{P(S|\bar{C})\,P(\bar{C})}{P(S)} = \frac{2/5 \cdot 1/2}{3/10} = \frac{2/10}{3/10} = \underline{\underline{2/3}}$

$P(S) = 1/2 \cdot 2/5 + 3/10 \cdot 1/6 + 1/5 \cdot 1/4 = \frac{2}{10} + \frac{3}{60} + \frac{1}{20} =$

$= \frac{12+3+3}{60} = \frac{18}{60} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

(c) X ... průměr kuličky

$X \sim Ro(2,4)$ → $F_X = \frac{x-a}{b-a}$

(ad 1) $P(X \geq 3{,}5) = 1 - P(X \leq 3{,}5) = 1 - F_X(3{,}5) =$

$1 - \frac{3{,}5-2}{4-2} = 1 - \frac{1{,}5}{2} = \frac{20}{20} - \frac{15}{20} = \frac{5}{20} = \underline{1/4}$

$\int_{3{,}5}^{4} \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x}{b-a} - 1\right]_{3{,}5}^{4} = \frac{4}{2} - \frac{3{,}5}{2} = \underline{\frac{1}{4}}$

$\frac{x}{2} \Rightarrow x=2 = 1-1=0$

(ad 2) $P(B) = 1/5$

$P(B \wedge Pr_{\geq 3{,}5}) = 1/5 \cdot 1/4 = \underline{1/20}$

(d) (ad 1) X ... doba do vypadnutí kuličky [min]

4 hovory / 10 min

delka hovoru 4/10 [hovorů/min]

$X \sim Exp(\lambda)$ $\quad 2/5$

$\lambda = 2/5$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$P(X=k) = F_X(k)$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3) = \underline{e^{-6/5}}$

(ad 1) Y ... počet hulích za 3 minuty

$Y \sim Po(\lambda)$ $\quad \lambda = 3 \cdot 2/5 = 6/5$

$$P(Y=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P[Y=0] = e^{-6/5}$$

(e) X ... počet červených hulích za 5 minut

$X \sim Po(\lambda)$ $\quad$ 2 [hulích / 5 minut]

$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $\quad \lambda = 1$ [červená / 5 minut]

$$P(X \leq 2) = P(\lambda=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= e^{-\lambda}\left(1 + \lambda^1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) = e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2e} \ (\approx 0{,}92)$$

(f) X ... počet vypadnutých hulích před prvním hlíněným

$P(H) = 7/20$

$X \sim Ge(p)$ $\quad p = 7/20$

$$P(X=k) = p(1-p)^k$$

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = p \sum_{i=0}^{k} (1-p)^i = 1 - (1-p)^5 =$$

$$= 1 - \left(13/20\right)^5$$

(g) X ... počet červených dvojných mezi 5 kuličkami

$X \sim Binom(n, p)$ $\quad n = 5 \quad p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

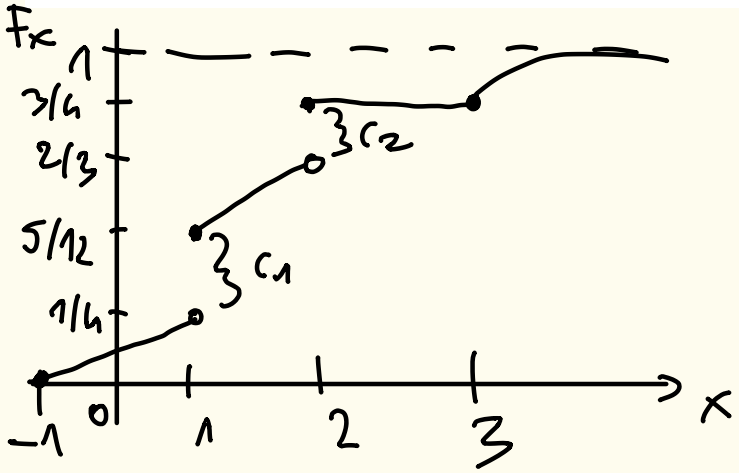
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 - 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \underline{\underline{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 - \left(\frac{4}{5}\right)^4}}$$

Úloha 2. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{8}x & , x \in \langle -1, 1) \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{4}x & , x \in \langle 1, 2) \\ \frac{3}{4} & , x \in \langle 2, 3) \\ 1 - \frac{1}{4}e^{3-x} & , x \in \langle 3, \infty) \end{cases}$$

1. Určete $P(1 < X < 2)$ a $P(1 \leq X \leq 2)$. (1 bod)
2. Vyjádřete X jako směs $X = Mix_c(D, S)$ náhodných veličin D a S, kde D je diskrétní a S spojitá, tj. určete konstantu c a pak popište rozdělení pravděpodobnosti pro D (pravděpodobnostní funkcí $P(D = k) = \ldots$ pro $k = \ldots$) a pro S (hustotou $f(x)$). (3 body)



$$c_1 = 5/12 - 1/4 = \frac{5-3}{12} = 1/6$$

$$c_2 = 3/4 - 2/3 = \frac{9-8}{12} = 1/12$$

$$c = c_1 + c_2 = 3/12 = \underline{1/4}$$

$$\underline{F_X = c F_D + (1-c) F_S}$$

(1)(a) $P(1 < X < 2) =$

$= P(X < 2) - P(X \leq 1) =$

$= \lim_{x \to 2^-} F_X(x) - \lim_{x \to 1^+} F_X(x) =$

$= 2/3 - 5/12 = \underline{\underline{1/4}}$

(b) $P(1 \leq X \leq 2) =$

$P(X \leq 2) - P(X < 1) =$

$= 3/4 - 1/4 = 1/2$

(2) $X = \text{Mix}_c(D, S)$

$$F_D = \begin{cases} 0 & (-\infty, 1) \\ 2/3 & \langle 1, 2) \\ 1 & \langle 2, \infty) \end{cases}$$

$P(D=1) = \underbrace{1/6 \cdot 4}_{} = 4/6 = 2/3$

$P(D=2) = 1/12 \cdot 4 = 1/3$

$$\boxed{P(D=i) = c_i \cdot 1/c}$$

$$F_X = 1/4\, F_D + 3/4\, F_S$$

$$F_S = 4/3 F_X - 1/3 F_D$$

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty, -1) \\ 1/6\, x + 1/6 & \langle -1, 1) \\ 1/3\, x & \langle 1, 2) \\ 2/3 & \langle 2, 3) \\ 1 - 1/3\, e^{3-x} & \langle 3, \infty) \end{cases} \quad f_S(x) = \begin{cases} 0 \\ 1/6 \\ 1/3 \\ 0 \\ \frac{1}{3} e^{3-x} \end{cases}$$

Firma 16.06.

(a) $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C) +$

$P(S|D)P(D) =$

$= 3/5 \cdot 1/3 + 7/10 \cdot 1/3 + 7/10 \cdot 1/6 + 9/10 \cdot 1/6 =$

$= 1/5 + 7/30 + 7/60 + 9/60 = \frac{12+14+7+9}{60} =$

$= \frac{42}{60} = \frac{21}{30} = \underline{\underline{7/10}}$

(b) $P(C|S) = \frac{P(S|C)\,P(C)}{P(S)} = \frac{\cancel{7/10} \cdot 1/6}{\cancel{7/10}} = \underline{\underline{1/6}}$