Úloha 1. Call-centrum jisté firmy přijme v průměru 30 hovorů za hodinu. Hovory jsou vzájemně nezávislé. 60% lidí, kteří volají do centra, jsou muži. Stý člověk, který se dovolá do centra, získá od firmy speciální odměnu. Použitím CLV spočtěte pravděpodobnost, že

1. mezi 150 lidmi volajícími do centra je nejvýše 75 mužů, (2 body)
2. doba čekání na volající(ho), který(á) získá odměnu, je nejméně 3 hodiny. (2 body)

(1) $X_i \dots 1$, i-tý volající je muž
$X_i \dots 0$, i-tý volající je žena
$\Big\} X_i \sim Alt(0,6)$

$\mathbb{E}X = 0,6$

$varX = 0,6(1-0,6) = 0,24$

$$P\left(\sum_{i=1}^{150} X_i \leq 75\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{150} x_i - 150 \cdot 0,6}{\sqrt{150 \cdot 0,24}} \leq \frac{75 - 150 \cdot 0,6}{\sqrt{150 \cdot 0,24}}\right)$$

$$P(Z \leq -2,5) = \Phi(-2,5) = 1 - \Phi(2,5) \simeq \dots$$

$\frac{2}{5} \cdot 150 = 30 \cdot 3$

90

-15

$\frac{}{6} =$

$= \frac{-5}{2} = -2,5$

(2) $X_i \dots$ doba čekání mezi $(i-1)$ tým a i tým volajícím

$X_i \sim Exp(0,5)$ počet volajících za min $\rightarrow \lambda = 0,5$

$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda} = 2$ $varX = \frac{1}{\lambda^2} = 4$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} x_i \geq 180\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{100} x_i \leq 180\right) = \frac{180 - 200}{\sqrt{400}} =$$

$$= 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} x_i - 100 \cdot 2}{\underbrace{\sqrt{100 \cdot 4}}_{z}} \leq \frac{180 - 100 \cdot 2}{\underbrace{\sqrt{100 \cdot 4}}_{z}}\right) = \frac{-20}{20} =$$

$$= 1 - P(z \leq -1) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \simeq \dots = -1$$

Úloha 2. Pojišťovna sledovala škody na rodinných domech způsobené požárem. Výše celkového ročního pojistného plnění (tj. celkové platby klientům, kteří utrpěli škody) za posledních pět let byly (uvedeno v milionech eur): 2; 2,5; 1; 10; 5. Předpokládejme, že hustota náhodné veličiny X popisující roční pojistné plnění (v milionech eur) je

$$f(x) = a^2 x e^{-ax} \quad \text{pro } x > 0 \text{ (jinak } f(x) = 0).$$

Odhadněte parametr a

1. metodou momentů, (2 body)
2. metodou maximální věrohodnosti. (2 body)

$$EX = \int_0^\infty x a^2 x\, e^{-ax}\, dx = a^2 \int_0^\infty x^2 e^{-ax}\, dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^{-ax} & v = -\frac{1}{a} e^{-ax} \end{matrix} \right| =$$

$$= a^2 \left(-\frac{x^2}{a} e^{-ax} + \int_0^\infty \frac{2x}{a} e^{-ax} \right) = \left[-x^2 a e^{-ax} \right]_0^\infty + 2a \int_0^\infty x e^{-ax} =$$

$$= 2a \int_0^\infty x e^{-ax} = \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-ax} & v = -\frac{1}{a} e^{-ax} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[-2x e^{-ax} \right]_0^\infty + 2 \int_0^\infty e^{-ax}\, dx =$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^\infty = 0 + \frac{2}{a} = \underline{\underline{\frac{2}{a}}}$$

$$\bar{x} = \frac{2 + 2{,}5 + 1 + 10 + 5}{5} = \frac{20{,}5}{5} = 4{,}1$$

$$\frac{2}{\hat{a}} = 4{,}1 \Rightarrow 2 = 4{,}1\hat{a} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{a} = \frac{20}{41}}}$$

MMV: $f(x) = a^2 x e^{-ax}$

$$L(a) = a^2 2 e^{-2a} \cdot a^2 2{,}5 e^{-2{,}5a} \cdot a^2 e^{-a} \cdot 10 \cdot a^2 e^{-10a} \cdot \underbrace{-2 \cdot 2{,}5 - 1 - 10 - 5}_{a^2 5 e^{-5a}} =$$

$$= 250\, a^{10} e^{-20{,}5a}$$

$$\ell(a) = \ln(250) + 10 \ln(a) - 20{,}5a$$

$$\ell'(a) = \frac{10}{a} - 20{,}5 = 0$$

$$10 - 20{,}5a = 0$$

$$20{,}5a = 10$$

$$205a = 100$$

$$\hat{a} = \frac{100}{205} = \frac{20}{41}$$

proměnné 4 zajíci denně

$X_i \sim Po(\lambda)$ $\lambda = 4$ v 7 týdnech (49 dní)
alespoň 175

$EX = 4 = varX$

$$P\left(\sum_{i=1}^{49} X_i \geq 175\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{49} X_i \leq 175\right) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{49} X_i - 49 \cdot 4}{\underbrace{\sqrt{49 \cdot 4}}_{7}} \leq \frac{175 - 4 \cdot 49}{\underbrace{\sqrt{49 \cdot 4}}_{7}}\right) =$$

$$= 1 - P\left(z \leq \frac{3}{2}\right) = 1 - \phi\left(-\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{175 - 196}{14}}$$

$$= \underline{\underline{\phi\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

Tramvaj jede každých 10 min
za 24 hod × 2 → jízd tramvají = 48
čekání nejvíc 3h.

X_i ... doba čekání na tramvaj [h]

$X_i \sim R_0(0,10)$

$EX = \frac{10}{2} = 5 \quad var X = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{50}{6} = \underline{\underline{\frac{25}{3}}}$

$$P\left(\sum_{i=1}^{48} \leq 180\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{48} x_i - 48 \cdot 5}{\sqrt{48 \cdot \frac{25}{3}}} \leq \frac{180 - 48 \cdot 5}{\sqrt{48 \cdot \frac{25}{3}}}\right)$$

$$= P(Z \leq -1) \approx \Phi(-3) = \quad z = \sqrt{400} = 20$$

$$= 1 - \Phi(3) \approx 0{,}103\% \qquad \frac{180 - 240}{-3}$$

(1) interval ... 10 min
pěšky ... 8 minut
vláčkem ... 2 minuty

(a) ze 150 pojede nejvíce 80 vláčkem
na vlak čekám max 6 minut
doba čekání na vlacích ... $R_0(0,10)$

X_i ... i-tý člověk přijde včas

$X_i \sim Alt\left(\frac{6}{10}\right)$ $P(X_i=1)=\frac{3}{5}$ ... včas

$P(X_i=0)=\frac{2}{5}$ ... nevčas

$EX=\frac{3}{5}$

$varX=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{6}{25}$

$\frac{-10}{6}=-\frac{5}{3}$

$$P\left(\sum_{i=1}^{150} X_i \le 80\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{150} X_i - 150\cdot\frac{3}{5}}{\sqrt{150\cdot\frac{6}{25}}} \le \frac{80-150\frac{3}{5}}{\sqrt{150\cdot\frac{6}{25}}}\right)=$$

$$=P\left(Z\le -\frac{5}{3}\right)=\Phi\left(-\frac{5}{3}\right)=1-\Phi\left(\frac{5}{3}\right)$$

2.) $EX=5$ $varX=\frac{25}{3}$

27 jízd včas

$$P\left(\sum_{i=1}^{27} x_i \le 90\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{27} x_i - 27\cdot 5}{\sqrt{27\cdot\frac{25}{3}}} \le \frac{90-27\cdot 5}{\sqrt{27\cdot\frac{25}{3}}}\right)$$

Z

$$=P(Z\le -3)=\Phi(-3)=1-\Phi(3)$$

(2) 20 losů cíl

12x trefa ihned

6x jeden neúspěch

2x dva neúspěchy

20x trefa } 20x úsp.

6x netrefa }

2x2 netrefa } 10x neú.

(a) $X \sim Alt(p)$

$EX = p$

$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ (1 nebo 0)

$p = m_1 = \frac{2}{3}$

$x_i \ldots 0$ nefunguje

$x_i \ldots 1$ funguje

(b) $X \sim Alt(p)$

$P(X=k) = p^k (1-p)^{1-k}$

$P(X=0) = [1\,(1-p)^1]^{10}$ nefunguje

$P(X=1) = [p]^{20}$ funguje

$L(p) = \prod_{i=1}^{30} x_i = p^{20} \cdot (1-p)^{10}$

$\ell(p) = 20 \ln p + 10 \ln (1-p)$

$\ell'(p) = \frac{20}{p} - \frac{10}{1-p} = 0$

$\frac{20}{p} = \frac{10}{1-p}$

$20(1-p) = 10p$

$20 - 20p = 10p$

$30p = 20$

$p = \frac{2}{3}$

(38)

kaźi	tabulek
0	17
1	4
2	1
3	2
4	0
5	1

$X_i \sim Po(\lambda)$ (počet kaźdá tabulka)

celk. tabulek $= 25$

celk. kaźi $= 4\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 5 =$

$= 4 + 2 + 6 + 5 = 17$

$X_i \sim Po(\lambda) \quad EX = \lambda$

$X_1 \dots X_{17} = 0$

$X_{18} \dots 21 = 1$

$X_{22} = 2$

$X_{23} \dots 24 = 3$

$X_{25} = 5$

$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{25}\cdot(17) =$

$m_1 = \frac{17}{25}$

$\lambda = m_1 = EX$

$\lambda = \frac{17}{25}$

MLE: $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$P(k=0) = e^{-\lambda}$

$P(k=1) = \lambda e^{-\lambda}$

$P(k=2) = \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$

$P(k=3) = \frac{\lambda^3}{6}e^{-\lambda}$

$P(k=5) = \frac{\lambda^5}{120}e^{-\lambda}$

$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{25} x_i =$

$= (e^{-\lambda})^{17}\cdot(\lambda e^{-\lambda})^4\cdot\left(\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}\right)^1\cdot\left(\frac{\lambda^3}{6}e^{-\lambda}\right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda^5}{120}e^{-\lambda}\right) =$

$= e^{-25\lambda}\cdot\lambda^{17}\cdot\frac{1}{120\cdot 6\cdot 6\cdot 2} = C$

$l(\lambda) = -25\lambda + 17\ln(\lambda) + \ln(C)$

$$\ell'(\lambda) = -25 + \frac{17}{\lambda} = 0$$

$$\frac{17}{\lambda} = 25$$

$$\underline{\underline{\lambda = \frac{17}{25}}}$$

(40)

6 na falešné ... 1/2, zbylých orsel = $\frac{1}{2}$ obhlavnosti

1/10 na hraně

1	2	3	4	5	6
18	20	12	15	10	25

x_i... nominální hodnota
y_i... falešná

kolik o/o hostek je falešných? $\frac{1+2+3+4+5+6}{10}$

$\frac{15+30}{10} = \frac{45}{10} = \underline{\underline{4,5}}$

$\mathbb{E} X_i = 3,5$

$\mathbb{E} y_i = 4,5$

$3,5(1-p) + 4,5\,p = 3,5 + p$ ← je falešná

$\overline{x} = \frac{1p+40+36+60+50+150}{100} = 3,54 = 3,5+p$

$\underline{\underline{p = 0,04}}$

50 domů 33 bytů 17 chat

data 2 2,5 1 10 5

$$f(x) = \beta^2 x e^{-\beta x} \quad \text{pro } x > 0 \quad (\max f(x) = 0)$$

~~(a)~~ (b) x_i ... výška skoky

(i): MLE $L(\beta) = \prod_{i=1}^{5} x_i = \beta^{10} e^{-20{,}5\beta} \cdot c$ ← konstanta

$$\ell(\beta) = 10 \ln \beta - 20{,}5\beta \ln e + \ln c$$

$$\ell'(\beta) = \frac{10}{\beta} - 20{,}5 \overset{\text{extrém}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{10}{\beta} = 20{,}5$$

$$\beta = \frac{10}{20{,}5} = \frac{100}{205} = \frac{20}{41} \Rightarrow (*)$$

(ii) MM:

Hledáme $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \beta^2 x e^{-\beta x} dx = \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\beta x} dx =$

$= \left[\right]_{0}^{\infty}$ (na $(-\infty, 0\rangle$ je $f(x)$ nulová)

$u = x^2 \quad u' = 2x$

$v' = e^{-\beta x} \quad v = \frac{-1}{\beta} e^{-\beta x}$

$$= \left\{ \frac{-x^2}{\beta} e^{-\beta x} \right\}_0^{\infty} + 2\beta \int_0^{\infty} x e^{-\beta x} dx =$$

$$= 2\beta \int_0^\infty x e^{-\beta x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-\beta x} & v = \frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \end{array} \right| =$$

$$= \left[\frac{-x}{\beta} e^{-\beta x} \right]_0^\infty + 2 \int e^{-\beta x} dx = 2 \left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \right]_0^\infty =$$

$$\boxed{EX = \frac{2}{\beta}}$$

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \bar{x} = \frac{20{,}5}{5} = 4{,}1 = \frac{2}{\beta}$$

$$4{,}1 = \frac{2}{\beta}$$

$$\hat{\beta} = \frac{2}{4{,}1} = \frac{20}{41} = (\text{result} + *)(*)$$

30 / hodin 60 % mužů

mezi 150 lidmi je nejméně 70 a nejvíce 80 mužů

X_i ... i-tý volající je muž → 0,6

$P(X_i=0)$ ... žena $X_i \sim Alt(p)$ $p(1-p)$

$P(X_i=1)$ ... muž $EX_i = p$ $\mathrm{var} X_i = 0{,}24$

$$P\left(70 \le \sum_{i=1}^{150} X_i \le 80\right) = \left(\frac{70 - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{0{,}24 \cdot 150}} \le \frac{\sum_{i=1}^{150} X_i - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{0{,}24 \cdot 150}} \le \frac{80 - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{0{,}24 \cdot 150}} \right)$$

α ... $\frac{70 - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{0{,}24 \cdot 150}}$

Z ... $\frac{\sum_{i=1}^{150} X_i - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{0{,}24 \cdot 150}}$

β ... $\frac{80 - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{0{,}24 \cdot 150}}$ = 6

$$P(\alpha \le Z \le \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

$$P(Z \le \beta) - P(Z < \alpha)$$

ekviv. s $\le$

$X_i \sim Exp(0{,}5)$ X_i ... doba čekání mezi $(i-1)$ a i-tým volajícím

$\mathbb{E}X = 2$ $varX = 4$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot 2}{20} \leq \frac{180 - 100 \cdot 2}{20}\right) =$$

$$= (Z \leq -1) = 1 - \Phi(1)$$