15.2. Pro daná čísla $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ chceme maximalizovat $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ za podmínek $-1 \leq x_i \leq 1$.

a) Vyřešte úvahou.
b) Sestrojte duální úlohu a upravte ji do co nejjednoduššího tvaru. Vyřešte duální úlohu úvahou (musí vám vyjít stejná optimální hodnota jako u primární úlohy).
c) Napište podmínky komplementarity.
d) Najděte číselné hodnoty optimálních primárních a duálních proměnných (které si odpovídají přes podmínky komplementarity) pro $n = 3$ a $(c_1, c_2, c_3) = (-2, 3, 4)$.

(a) pokud chceme maximalizovat výraz $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, kde $-1 \leq x_i \leq 1$, pro daná $c_1 \ldots c_n \in \mathbb{R}$, budeme pro $c_i < 0$ volit $x_i = -1$, pro $c_j > 0$ $x_j = 1$
(pro $c_k = 0$ x_k libo volně)

proto tedy $x_i = \operatorname{sgn}(c_i)$, hodnoty budou rovny $|c_i|$,

tedy $\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{n} |c_i|$

(b) $\min \left\{ \sum_i \mu_i + \sum_i \nu_i \mid \mu_i \geq 0, \nu_i \geq 0, \nu_i - \mu_i = c_i \right\}$

kde $\mu = -z$
a $\nu = y$

řešení: $\sum_i \min\{\mu_i + \nu_i\} \rightarrow$ buď $\mu_i = 0 \wedge \nu_i = c_i$ nebo $\mu_i = -c_i \wedge \nu_i = 0$ $\Big\} |c_i|$

$\downarrow$

$\sum_i |c_i|$

(c) budou platit podmínky $x_i = -1 \vee \mu_i = 0$ $\forall_i$
$x_i = 1 \vee \nu_i = 0$

(d) $(c_1, c_2, c_3) = (-2, 3, 4) \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 1)$
$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 0, 0)$
$(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (0, 3, 4)$

15.3. Napište duální úlohu a podmínky komplementarity k následujícím úlohám. Pokud úloha není LP, nejdříve převeďte na LP (dle §12.1). Výslednou duální úlohu zjednodušte, je-li to možné. Kde to má smysl, pokuste se interpretovat duální úlohu a věty o dualitě, podobně jako v Příkladu 15.5.

a) lineární program ze Cvičení 14.8

b) $\min_{x\in\mathbb{R}} \max_{i=1}^{n} |a_i - x|$ (střed intervalu)

(a)

14.8. Mějme lineární program

$$\begin{array}{rrcl} \min & 2x_1 & -3x_3 + x_4 & \\ \text{za podmínek} & x_1 - x_2 - x_3 & & \geq 0 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & & \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & & = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & & \geq 0 \end{array}$$

LP:

$\min\ 2x_1 - 3x_3 + 4x$

z.p. $x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$

$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 5$

$2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$

$x_4 \geq 0$

Duální:

z.p. $\max\ 5y_2 + 6y_3$

$y_1 \geq 0$

$y_2 \leq 0$

$y_3 \in \mathbb{R}$

$y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 2$

$-y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 0$

$-y_1 - 3y_2 - y_3 \leq -3$

$2y_3 \leq 1$

Podmínky komplementarity:

$y_1(x_1 - x_2 - x_3) = 0$

$y_2(-x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5) = 0$

$x_1(y_1 - y_2 + 2y_3 - 2) = 0$

$x_2(-y_1 + 2y_2 - y_3) = 0$

$x_3(-y_1 - 3y_2 - y_3 + 3) = 0$

$x_4(2y_3 - 1) = 0$

(b) $\min_{x\in\mathbb{R}} \max_{i=1}^{n} |a_i - x|$

převedeme na LP: $\min_{z\in\mathbb{R}} \{z,\ z \geq a_i - x,\ z \leq -a_i + x\}$

$\min\ z$

$x + z \geq a_i \qquad -x + z \geq -a_i$

z.p.

$$\begin{bmatrix} 1^n & 1^n \\ -1^n & 1^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

Duální úloha

$\max\ A^T u - A^T v$

podmínky komplementarity:

$z = a_i - x \ \vee\ u_i = 0$

$z = x - a_i \ \vee\ v_i = 0$