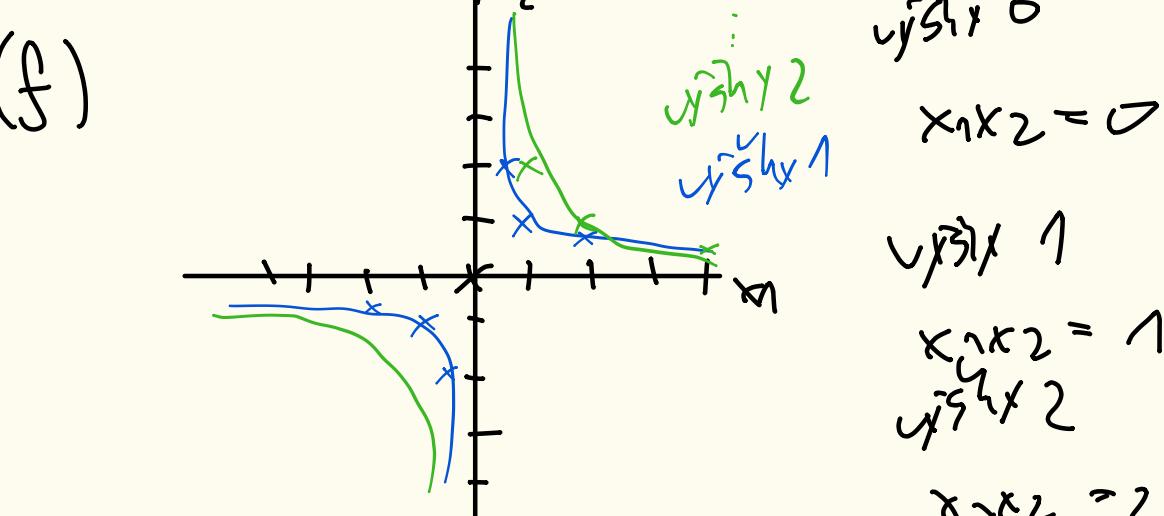
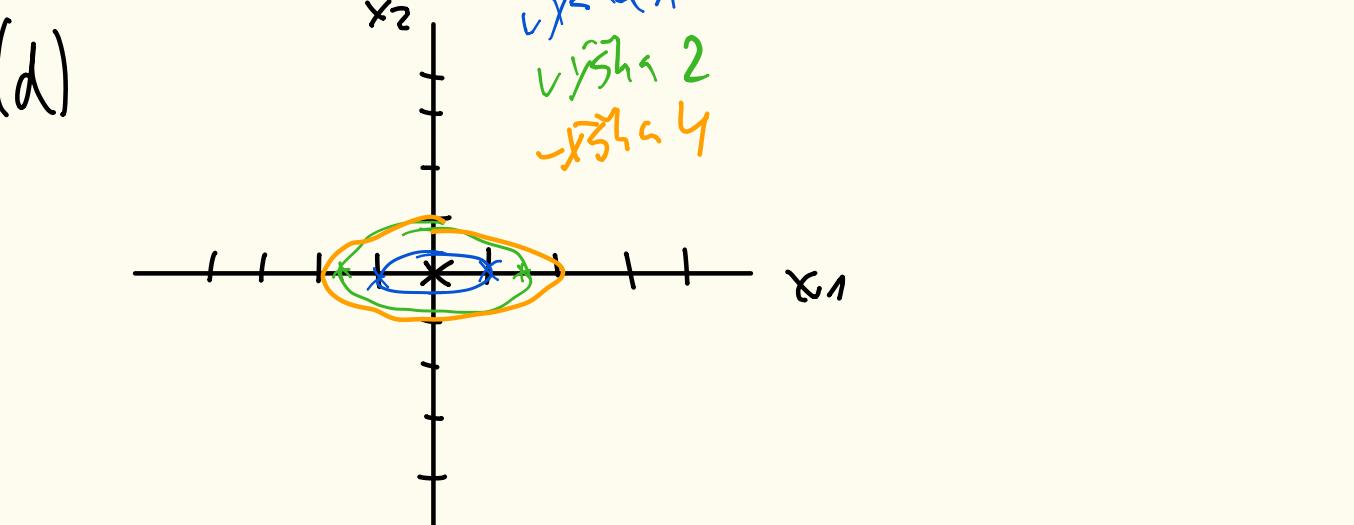
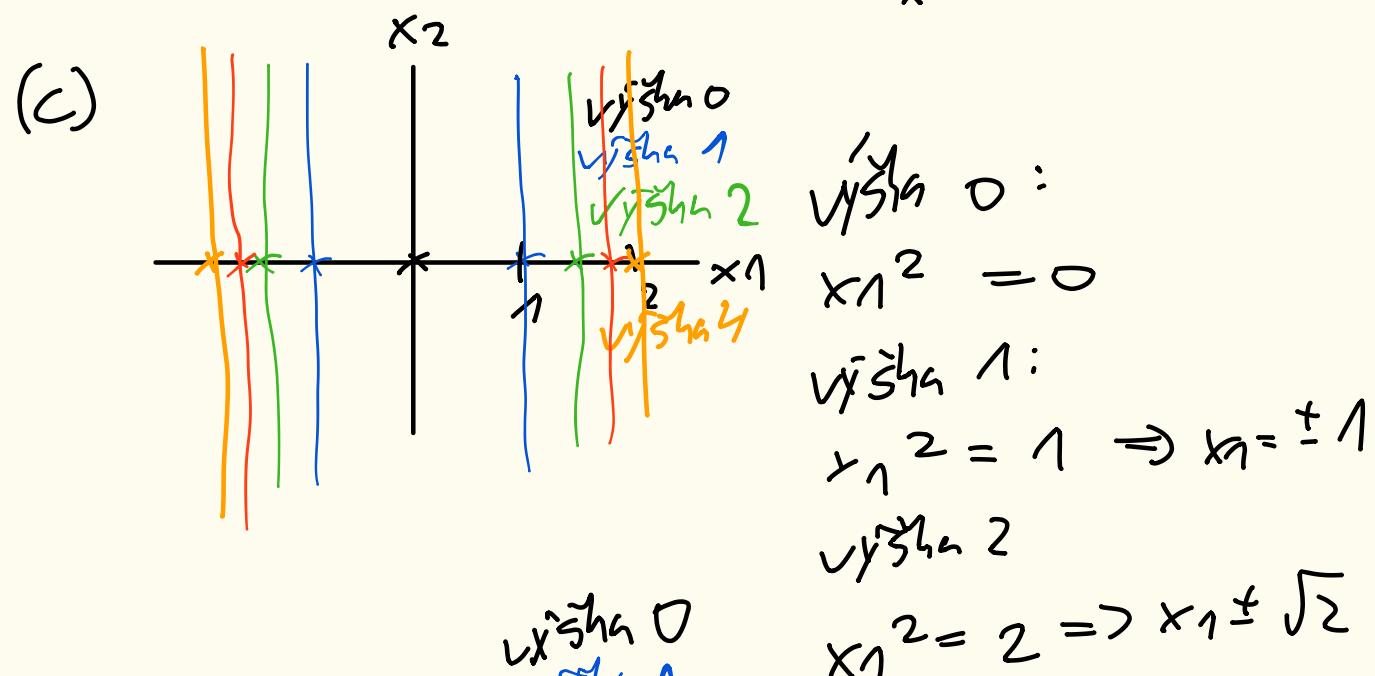
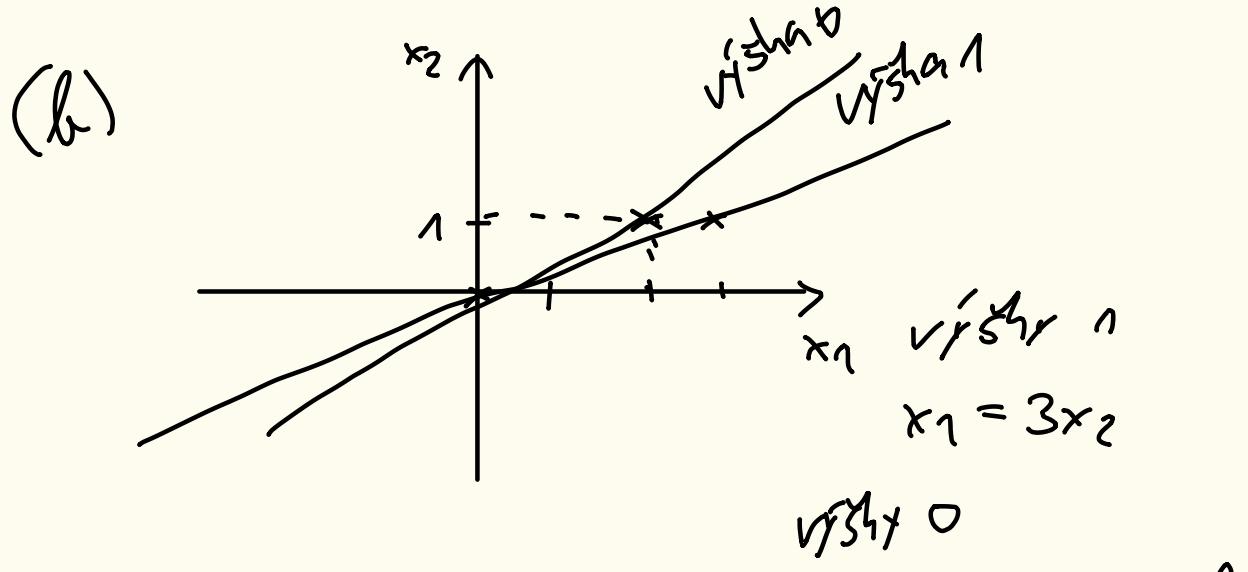


8.1. Načrtněte několik vrstevnic (připište k nim výšky) těchto funkcí dvou proměnných:

- a) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$
- b) $f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 + 1$
- c) $f(x_1, x_2) = x_1^2$
- d) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$
- e) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$
- f) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$
- ~~g) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (tj. eukleidovská norma $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ pro $n = 2$)~~



8.3. Máme funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s hodnotami $f(x, y) = \ln(1 + xy)$. Máme bod $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

- Je funkce f v bodě (x_0, y_0) spojitá?
- Je funkce f v bodě (x_0, y_0) spojite diferencovatelná?
- c) Je funkce f v bodě (x_0, y_0) diferencovatelná?
- d) Najdete totální derivaci (Jacobiho matici) $f'(x, y)$ funkce f v bodě (x_0, y_0) .
- Najdete gradient $\nabla f(x, y)$ funkce f v bodě (x_0, y_0) .
- Najdete řez a směrovou derivaci funkce f v bodě (x_0, y_0) ve směru $(1, -1)$.
- g) Najdete Hessovu matici funkce f v bodě (x_0, y_0) .

$$(d) f'_1 = \frac{y}{1+xy} \quad f'_2 = \frac{x}{1+xy}$$

$$f' = \begin{pmatrix} y \\ \frac{y}{1+xy} \\ x \\ \frac{x}{1+xy} \end{pmatrix}$$

$$f'(1, 2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+2} \\ \frac{1}{1+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$(g) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x \partial x} = \frac{-y^2}{(1+xy)^2} \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1+xy)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y \partial y} = \frac{-x^2}{(1+xy)^2}$$

$$H_f(x, y) = (1+xy)^2 \begin{pmatrix} -y^2 & 1 \\ 1 & -x^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(1, 2) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

8.10. Nadmořská výška krajiny je dána vzorcem $h(d, s) = 2s^2 + 3sd - d^2 + 5$, kde d je zeměpisná délka (zvětšuje se od západu k východu) a s je zeměpisná šířka (zvětšuje se od jihu k severu). V bodě $(d, s) = (-1, 1)$ určete (a) směr nejstrmějšího stoupání terénu, (b) strmost terénu v jihovýchodním směru.

$$h(d, s) = 2s^2 + 3sd - d^2 + 5$$

$$\frac{\partial h}{\partial d} = 3s - 2d \quad \frac{\partial h}{\partial s} = 4s + 3d$$

$$(a) \quad \nabla h = (3s - 2d, 4s + 3d)$$

$$\nabla h(-1, 1) = (3 + 2, 4 - 3) = (5, 1)$$

$$\text{směr nejv. růstu: } (5, 1) / \sqrt{5^2 + 1^2} = (5, 1) / \sqrt{26}$$

$$(b) \quad \begin{array}{ccc} W & & E \\ & \searrow & \downarrow \\ & S & \end{array} \quad N = (1, -1) \\ N_{\text{norm.}} = (1, -1) / \sqrt{2} \\ \text{směr SE: } (1, -1)$$

$$\text{strmost: } (5, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} / \sqrt{2} = \\ = 4 / \sqrt{2}$$

9.7. Najdete (úvahou, s pomocí náčrtků, bez použití derivací) všechny extrémy funkce

a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ (kde nenulový vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je dán)

b) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$

na množině

A) \mathbb{R}^n

B) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$

C) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$

D) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < 1\}$

E) daný affinní podprostor prostoru \mathbb{R}^n

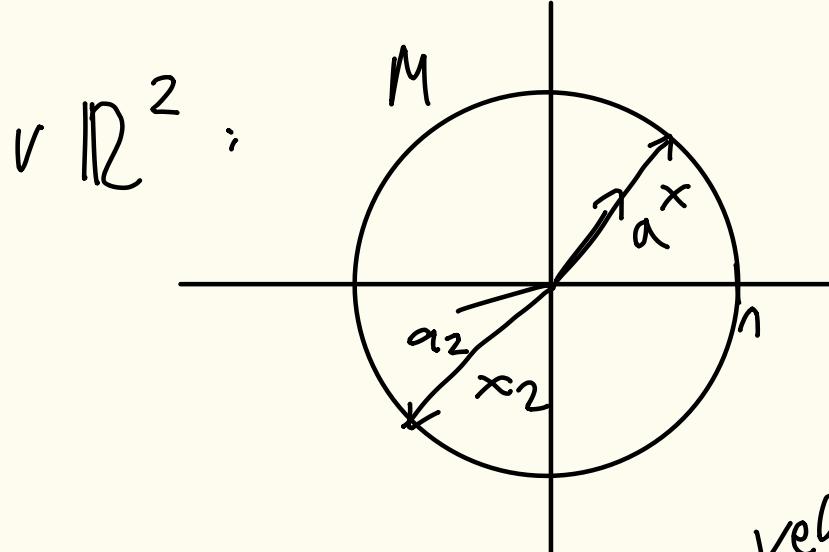
F) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq \mathbf{1}^T \mathbf{x} \leq 1\}$

U každého extrému urči, zda je lokální/globální, volný/vázaný.

ac

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \text{ dán}$$

$$\text{na množině } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$



extrémy budou ležet na povrchu
n-dim. sféry

proto

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$$

vektor \mathbf{x} : $x_i = 1$ pro $a_i \geq 0$

glob. maximum $x_i = -1$ pro $a_i < 0$

význam: tento vektor leží v jednotkové sféře \mathbb{R}^n

$$\max: \underline{\sum |a_i|}$$

obdobně: glob. minimum $x_i = -1$ pro $a_i \geq 0$

význam: $x_i = 1$ pro $a_i < 0$

$$\min: \underline{-\sum |a_i|}$$