10.1. Funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má stacionární bod $(2,1,5)$. Co se dá o tomto stacionárním bodě říci, když Hessova matice $f''(2,1,5)$ v něm má vlastní čísla (a) $\{2,3,-1\}$, (b) $\{2,3,0\}$, (c) $\{2,1,1\}$.

(c) je to loh. minimum (H.m. je pos. definitní)

(a) Hess. matice je indefinitní
je to sedlový bod

(b) H.m. je positivně semidefinitní
v bodě není loh. max.
může v něm být loh. min / sedlový bod

10.2. Pro následující funkce najděte stacionární body (dejte pozor při řešení stacionárních podmínek, ať vám nějaká řešení neuniknou). Pro každý stacionární bod určete, zda je to lokální minimum, lokální maximum, či ani jedno. Pokud to určit neumíte, odůvodněte.

a) $f(x,y) = x(1 - \frac{2}{3}x^2 - y^2)$
b) $f(x,y) = 1/x + 1/y + xy$
c) $f(x,y) = e^y(y^2 - x^2)$
d) $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$
e) $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$

(d) $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 3x^2 - 3y^2$ $\quad \nabla f = \begin{bmatrix} 3-3x^2-3y^2 \\ -6xy \end{bmatrix} = 0$ ← ex. extrem

$\frac{\partial f}{\partial y} = -6xy$

$H_f = \begin{bmatrix} -6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}$

$6xy = 0$
$3x^2 + 3y^2 - 3 = 0$
$x^2 + y^2 = 1$
$xy = 0$

$x^2 = 1 - y^2$
$x = \pm\sqrt{1-y^2}$

$\pm y\sqrt{1-y^2} = 0$ $\quad y = 0 \quad x = \pm 1$

$1 - y^2 = 0 \quad = \quad y = \pm 1 \quad x = 0$

stac. body $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

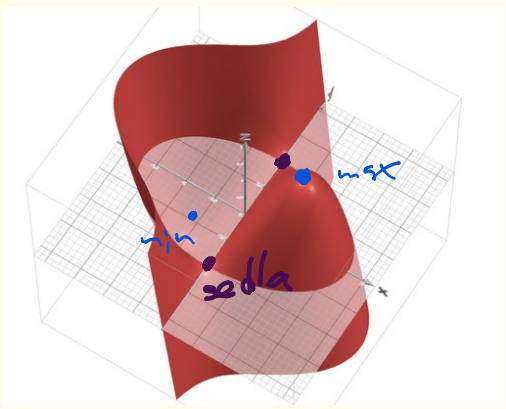
$H_f(1,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\sigma_1 = -$, $\sigma_2 = +$, neg. def. loh max

$H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\sigma_1 = +$, $\sigma_2 = +$, pos. def. loh min

$H_f(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = +$ sedlo

$H_f(0,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = +$ sedlo

graf pro porovnání výsledků:



(e) $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6y^2 - 6x^2 = 0 \qquad x^2 = y^2$$

$$x = \pm\sqrt{y^2} = \pm y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12xy - 12y^3 = 0$$

$$12xy = 12y^3 \quad y \neq 0$$

$$12x = 12y^2 \qquad [0,0]$$

$$x = y^2 \qquad [1,-1]$$

$$[1,1]$$

$$H_f = \begin{bmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x - 36y^2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ indef.

sedlo

$$H_f(1,-1) = \begin{bmatrix} -12 & -12 \\ -12 & -24 \end{bmatrix}$$ $\sigma_1 = -$, $\sigma_2 = +$, neg. def. — lok. max

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -24 \end{bmatrix}$$ $\sigma_1 = -$, $\sigma_2 = +$ — lok. max

10.3. Najděte lokální extrémy funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s hodnotami $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$, kde $\mathbf{a}$ je daný vektor.

pro $n=1$

$$f(x) = ax - x\ln x$$

$$f'(x) = a - (\ln x + 1) = a - \ln x - 1 = 0 \quad \leftarrow \text{extrém}$$

$$\ln x = a - 1$$

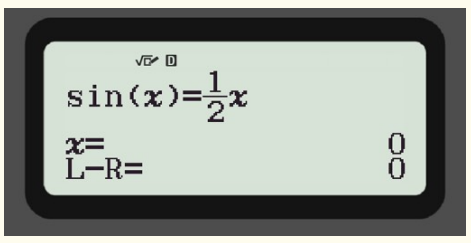
$$\underline{\underline{x = e^{a-1}}}$$

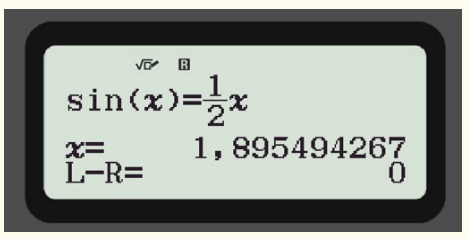
pro n lib.

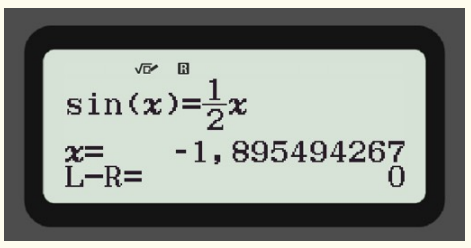
$$\underline{\underline{x_i = e^{a_i - 1}}} \quad \text{pro } i = 1..n$$

10.5. Najděte všechna řešení rovnice $\sin x = \frac{1}{2}x$ (sinus je v radiánech) na kalkulačce s největší přesností, jakou dokážete.

$$\sin x = 1/2\, x$$

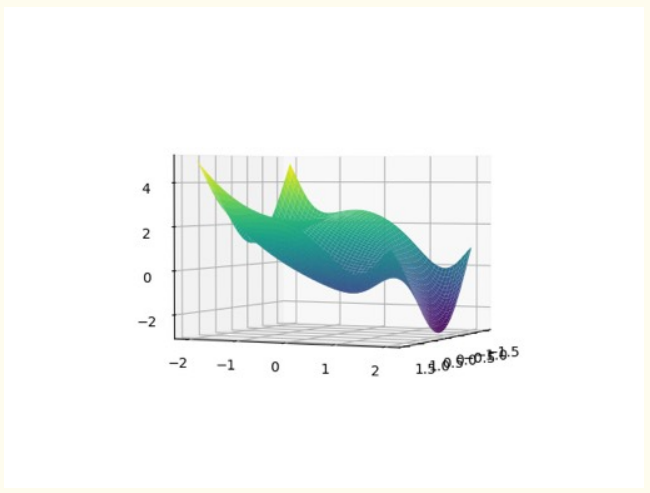


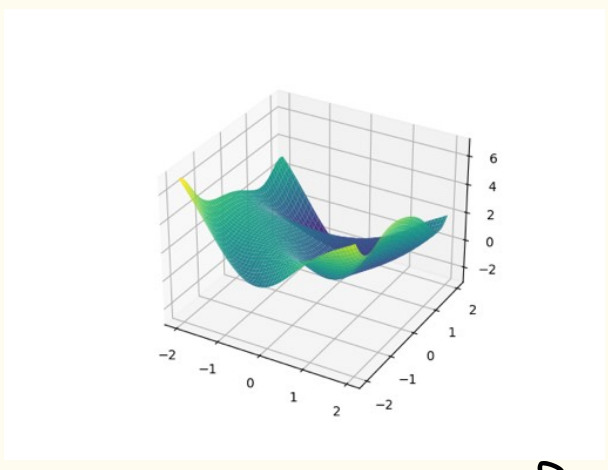




při spuštění výpočtu na kalkulačce jsem zadal počáteční hod $0, \pi/2$ a $-\pi/2$

10.6. Najděte lokální extrém funkce $f(x, y) = x^2 - y + \sin(y^2 - 2x)$ čistou Newtonovou metodou. Počáteční odhad zvolte $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Můžete použít počítač.





$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2\cos(y^2 - 2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 + 2y\cos(y^2 - 2x)$$

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 - 4\sin(y^2 - 2x) & 4y\sin(y^2 - 2x) \\ 4y\sin(y^2 - 2x) & 2\cos(y^2 - 2x) - 4y^2\sin(y^2 - 2x) \end{bmatrix}$$

$$2\cos(y^2-2x)-4y^2\sin(y^2-2x)$$

```
jakub@NitroN50-620:~/ctu/opt$ python3 newton.py
Newton iter: 0, value at [0.65208868 0.71851187]: -1.002178588763675
Newton iter: 1, value at [0.68064618 0.73403334]: -1.003594651529761
Newton iter: 2, value at [0.68074542 0.7344892 ]: -1.0035948839127933
Newton iter: 3, value at [0.68074537 0.73448902]: -1.0035948839128281
Newton iter: 4, value at [0.68074537 0.73448902]: -1.003594883912828
Result: [0.68074537 0.73448902]
```

```python
from scipy.optimize import newton as Nwt
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(val):
    x, y = val
    return x**2 - y + np.sin(y**2 - 2*x)

def plot(iterations):
    x = np.linspace(-0.5, 1.5, 100)
    y = np.linspace(-0.5, 1.5, 100)
    X, Y = np.meshgrid(x, y)
    Z = f((X, Y))

    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
    ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')

    for point in iterations:
        ax.scatter(*point, f(point), color='r')

    ax.view_init(azim=25, elev=10)

    plt.savefig("newton.png")
```

```python
def J(val):
    x, y = val
    res = np.zeros(2)

    res[0] = 2*x - 2*np.cos(y**2 - 2*x)
    res[1] = -1 + 2*y*np.cos(y**2 - 2*x)

    return res

def H(val):
    x, y = val
    res = np.zeros((2, 2))

    res[0][0] = 2 - 4*np.sin(y**2 - 2*x)
    res[0][1] = 4*y * np.sin(y**2 - 2*x)
    res[1][0] = 4*y * np.sin(y**2 - 2*x)
    res[1][1] = 2*np.cos(y**2 - 2*x) - 4 * y**2 * np.sin(y**2 - 2*x)

    return res

def Newton(x0: np.ndarray, func: callable, iter=100):
    last = x0
    iters = [x0]

    for i in range(iter):
        diff = J(x0)
        hess = H(x0)

        V = np.linalg.solve(hess, diff)

        x0 = x0 - V
        last = x0
        iters.append(last)

        print(f"Newton iter: {i}, value at {x0}: {func(x0)}")

    return last, iters

if __name__ == "__main__":
    x0 = np.array((1, 1))
    res = Newton(x0, f, iter=5)
    print(f"Result: {res[0]}")
    plot(res[1])
```