11.1. Na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ najděte lokální extrémy funkce

~~a)~~ $f(x, y) = 2x - y$

~~b)~~ $f(x, y) = x(y - 1)$

~~c)~~ $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

d) $f(x, y) = x^2 y$

$f(x,y) = x^2 y$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$h(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

$h(x,y,\lambda) = x^2 y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$\frac{\partial h}{\partial x} = 2xy - 2\lambda x = 0 \quad (1)$

$\frac{\partial h}{\partial y} = x^2 - 2\lambda y = 0 \quad (2)$

$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \quad (3)$

$2xy = 2\lambda x$

$x^2 = 2\lambda y$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\frac{x^2}{2xy} = \frac{2\lambda y}{2\lambda x}$

$x^3 = 2xy^2$

$/ : x \quad x \neq 0$

$x^2 = 2y^2$

$2y^2 + y^2 = 1$

$3y^2 = 1$

$y_{1,2} = \pm\sqrt{1/3} = \pm 1/\sqrt{3}$

$x^2 = 1 - y^2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{1-y^2} = \pm\sqrt{2/3}$

$f(x,y) = x^2 y$

uvnitř $x = 0$

$y^2 = 1$ ze (3)

$0 - 0 = 0$ z (1)

$0 - 2\lambda y = 0$

body podezřelé z extrému:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2/3} & -1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2/3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f = 0 \\ f = 0 \\ f = 2/3 \cdot 1/\sqrt{3} = 2/3\sqrt{3} \\ f = -2/3\sqrt{3} \\ f = 2/3\sqrt{3} \\ f = -2/3\sqrt{3} \end{matrix}$$

- vázané (lokální) max
- vázané (lokální) min

11.4. Najděte bod nejblíže počátku na křivce

- ~~$x + y = 1$~~
- ~~$x + 2y = 5$~~
- c) $x^2 y = 1$
- ~~$x^2 + 2y^2 = 1$~~

$g(x,y) = x^2 y - 1$

$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (vzdálenost od počátku)

$h(x,y,\lambda) = (x^2 + y^2)^{1/2} - \lambda(x^2 y - 1)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 1/2\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\cdot 2x - 2xy\lambda = 0$$

$x\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 1/2\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\cdot 2y - x^2\lambda = 0$$

$2y\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = -\left(x^2y-1\right) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2xy\lambda = 0 \qquad 2xy\lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2\lambda = 0 \qquad x^2\lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x^2y - 1 = 0$$

$$\frac{x^2\lambda}{2xy\lambda} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} =$$

$$\frac{x}{2y} = \frac{y}{x}$$

$$x^2 = 2y^2$$

$$2y^2\cdot y - 1 = 0 \qquad x^2\cdot \sqrt[3]{2} = 1$$

$$2y^3 = 1 \qquad x^2 = \sqrt[3]{2}$$

$$y^3 = 1/2 \qquad x = \pm\sqrt[6]{2}$$

$$y = 1/\sqrt[3]{2}$$

body podezřelé z extrému:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[6]{2} & 1/\sqrt[3]{2} \\ -\sqrt[6]{2} & 1/\sqrt[3]{2} \end{bmatrix}$$

→ po dosazení do f vyjdou obě stejně

11.11. *Fermatův princip nejkratšího času* v paprskové optice říká, že cesta mezi libovolnými dvěma body na paprsku má takový tvar, aby ji světlo proběhlo za čas kratší než jí blízké dráhy. Z tohoto principu odvoďte:

a) Zákon odrazu od zrcadla: úhel dopadu se rovná úhlu odrazu.
b) Snellův zákon lomu: na rozhraní dvou prostředí se světlo lomí tak, že

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2},$$

kde α_i je úhel paprsku od normály rozhraní a c_i je rychlost světla v prostředí i.

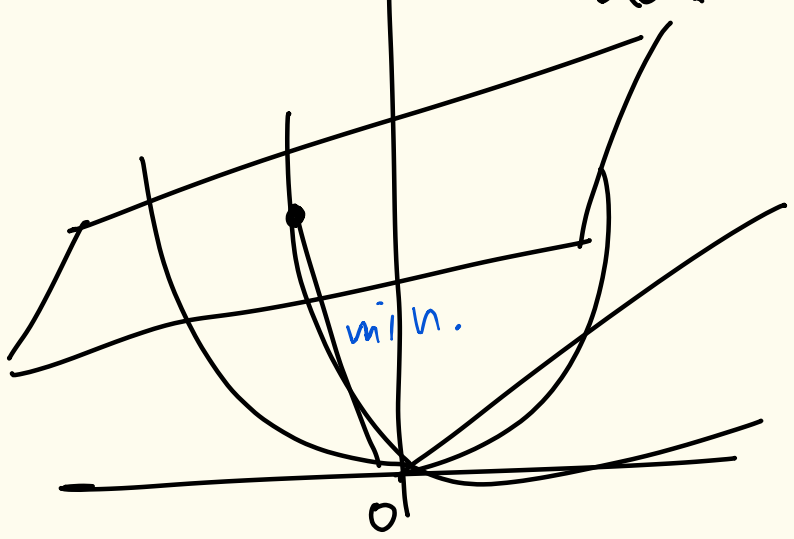
Nápověda: Uvažujte zrcadlo/rozhraní jako křivý povrch $X = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) = 0 \}$, kde funkce $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v každém bodě nenulový gradient. Uvažujte (libovolné) dva body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ (v případě lomu každý na jiné straně rozhraní) a napište podmínku na bod $\mathbf{x} \in X$ tak, aby čas letu světla po dráze **a-x-b** byl lokálně extrémní.

Později se zjistilo, že správným kritériem není *nejkratší* ale *extrémní* čas, tedy skutečná dráha paprsku má čas větší nebo menší než jí blízké dráhy. Dokážete najít situaci, kdy skutečná dráha paprsku má čas *větší* než jí blízké dráhy?

2.

11.16. Minimalizujte $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ za podmínky $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = 1$. Jaký je geometrický význam úlohy?

↓ → afinní podprostor

kvadratická vzdálenost za počátku

geom: min. kvadr. vzdálenosti od počátku z.p. afinního podprostoru