HW2 Jakub Pelc

2.1. Vyřešte tyto rovnice a soustavy rovnic pro neznámou matici $\mathbf{X}$ (předpokládejte, že každá potřebná inverze existuje):

a) $\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{A}^2\mathbf{X}$
b) $\mathbf{X} - \mathbf{A} = \mathbf{XB}$
c) $2\mathbf{X} - \mathbf{AX} + 2\mathbf{A} = \mathbf{0}$

(a) $AX + B = A^2X$

$A^2X - AX = B$

$(A^2 - A)X = B$

$X = (A^2 - A)^{-1}B$

(c) $2X - AX + 2A = 0$

$(2I - A)X = -2A$

$X = (2I - A)^{-1}(-2A)$

(b) $X - A = XB$

$X - XB = A$

$X(I - B) = A$

$X = A(I - B)^{-1}$

2.3. Chceme vyřešit soustavu rovnic

$$\mathbf{Ax} + (\mathbf{y}^T\mathbf{B})^T = \alpha\mathbf{1}$$
$$\mathbf{Ay} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

kde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou známé matice, $\mathbf{c}$ je známý vektor, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ jsou neznámé vektory a α je neznámý skalár. Soustavu přepište do tvaru $\mathbf{Pu} = \mathbf{q}$, kde matice $\mathbf{P}$ a vektor $\mathbf{q}$ obsahují známé konstanty a vektor $\mathbf{u}$ obsahuje všechny neznámé.

$Ay - c = 0$

$Ax + (y^TB)^T - \alpha = 0$

$Ax + yB^T - \alpha = 0$

$$\begin{bmatrix} A & B^T & -1 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \end{bmatrix}$$

3.1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou lineární nebo afinní podprostory $\mathbb{R}^n$ a když ano, určete jejich dimenze:

a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = 0\}$ pro dané $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
b) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$ pro dané $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$
c) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1\}$

(a) lineární, dimenze $n-1$ $a \neq 0$ n $a = 0$

(b) afinní, pro $b = 0$ příklad (a), dimenze $n-1$

(c) není

→ pro $a \neq 0$ $b = 0$ není

$a = 0$ $b \neq 0$ n

$a \neq 0$ $b = 0$ $n-1$

3.2. Je množina $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0\}$ lineární podprostor? Pokud ano, najděte jeho libovolnou bázi.

Podmínky splňují vektory $\alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ -a_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ -a_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 \\ -\alpha a_1 - \beta a_2 \\ -\alpha d_1 - \beta d_2 \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}$

$x_1 + x_3 = \alpha a_1 + \beta a_2 - \alpha a_1 - \beta a_2 = 0$

podmínka splněna

Báze například

$B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

3.7. Máme zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definované jako $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, 2x - 1, x - y)$. Je toto zobrazení lineární? Pokud ano, napište ho ve formě (3.7). Je toto zobrazení afinní? Pokud ano, napište ho ve formě (3.26). Obě odpovědi dokažte z definic.

$f(x) = Ax + b$

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dk: g lin., $f(x) = g(x) + b$

f afinní?

$f(\sum \alpha_i x_i) = g(\sum \alpha_i x_i) + \sum \alpha_i b$

$\sum \alpha_i = 1$

$= \sum \alpha_i g(x_i) + \sum \alpha_i b$

$= \sum \alpha_i (g(x_i) + b) = \sum \alpha_i f(x_i)$

je afinní

3.8. Máme nehomogenní soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

dvou rovnic o třech neznámých. Napište množinu řešení soustavy jako $X + \mathbf{x}_0$, kde $X \subseteq \mathbb{R}^3$ je lineární podprostor (napište jeho bázi) a $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\det A = 1$

$\operatorname{rank} A = 2$

hor:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$(-1\ 1\ -1)$

potom řešení:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

3.10. Najděte bázi prostoru obrazů a bázi nulového prostoru následujících lineárních zobrazení:

a) $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2,\ x_2 - x_3 + 2x_1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ker: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$(\dim \ker = 1)$

$\Downarrow$

$(\dim \operatorname{im} = 2)$

jádro: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

Báze:

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

→ potom báze prostoru obrazů například

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ (nebo i (e_1, e_2), $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$)