4.1. Máme vektory $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ a $\mathbf{y} = (-1, 0, 1)$. Spočítejte (a) délku vektoru $\mathbf{x}$, (b) vzdálenost bodů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, (c) úhel mezi vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

(a) $\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

(b) $\|y - x\| = \|(-2 \quad -2 \quad -2)\| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$

(c) $\cos\varphi = \dfrac{|x \cdot y|}{\|x\| \cdot \|y\|} = \dfrac{|-1+3|}{\sqrt{14}\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{28}} = \dfrac{2}{2\sqrt{7}} = 1/\sqrt{7}$

$\|y\| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \varphi = \arccos(1/\sqrt{7}) \approx 1{,}183$ rad

4.3. Najděte bázi ortogonálního doplňku prostoru $\mathrm{span}\{(0, 1, 1), (1, 2, 3)\}$.

ortog prostor je null space

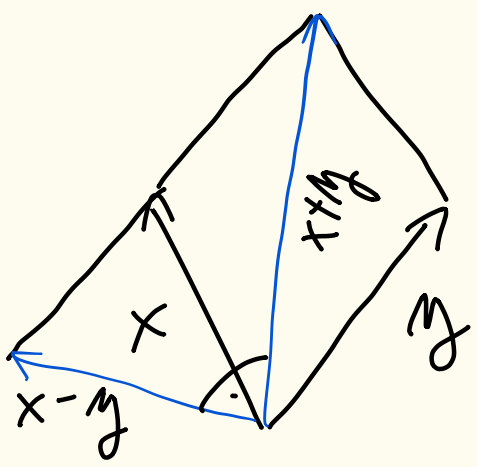
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

řešení např $(1 \; 1 \; -1)$, což je i báze ortog. prostoru $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

4.5. Pro dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dokažte následující tvrzení, nakreslete obrázek a uvědomte si, jaké známé středoškolské poučky jste to vlastně dokázali.

a) Jestliže $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, pak $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \perp (\mathbf{x} - \mathbf{y})$.
b) Jestliže $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, pak $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$.
c) Jestliže $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, pak $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$.

(a)



$(x+y)\cdot(x-y) = x^2 - y^2$

jestliže $\|x\| = \|y\|$

potom

$\|x\|^2 - \|x\|^2 = 0$

jsou kolmé

Pythag. věta

(c) $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|^2 + \|(y_1, y_2, \ldots, y_n)\|^2 =$

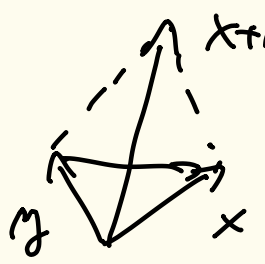
$= \sqrt{x^2}^2 \quad = \sqrt{y^2}^2$

$= (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) + (y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2) =$

$= (x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, \ldots, x_n^2 + y_n^2) =$

$= \|x + y\|^2$

(b) $\|x - y\|^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ($xy \Rightarrow 0$)



$= \|x^2\| + \|y^2\|$

Úhlopříčky v kosočtverci

4.10. Existuje isometrie $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tak, že $\mathbf{f}(1,-1,2) = (1,2,-1,1)$ a $\mathbf{f}(1,1,0) = (0,1,-1,0)$?

Aby existovala isometrie f, musela by toto zobrazení zachovávat (euklid. normu) vzdálenosti. Ale $\|(1,-1,2)\| \neq \|(1,2,-1,1)\|$.

$$\sqrt{6} \neq \sqrt{7}$$

Tudíž f isometrické nemůže existovat.

4.13. Najděte dva ortogonální vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ takové, že $\operatorname{span}\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} = \operatorname{span}\{(0,1,1),(1,2,3)\}$.

$a_1 = (0,1,1) \quad a_2 = (1,2,3)$

$q_1' = a_1 = (0,1,1) \qquad q_1 = \frac{q_1'}{\|q_1'\|} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$q_2' = a_2 - (q_1^T a_2) q_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0\\\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \underbrace{\left(0 + \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{5\sqrt{2}}{2}}\begin{bmatrix}0\\\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\5/2\\5/2\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\-1/2\\1/2\end{bmatrix}}}$$

$x = (0,1,1) \quad y = (1,-1/2,1/2)$