

5.1. Máme soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Dokažte nebo vyvrátete následující tvrzení:

- Pokud $m < n$, pak soustava má vždy řešení.
- Pokud $m > n$, pak soustava nemá nikdy řešení.
- Pokud $m < n$ a \mathbf{A} má plnou hodnot, pak soustava má vždy nekonečně mnoho řešení.

(a) nepříklad
p-p například $m=1, n=3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 7, \text{ nehmí řešení}$$

(b) nepříklad

p-p například $m=3, n=1$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{existuje řešení} \\ \text{pro } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(c) platí
 \mathbf{A} má menší řádky než sloupce, má plnou hodnot \Rightarrow má LN rádky

$\text{rang } \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$, zároveň $\text{null } \mathbf{A}$ obsahuje pouze 0
 má řešení

\downarrow
má nekonečně mnoho řešení

5.3. Formuluje jako přibližné řešení soustavy $\mathbf{Pu} = \mathbf{q}$ ve smyslu nejmenších čtverců, tedy jako úlohu $\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{Pu} - \mathbf{q}\|^2$. Jako výsledek napište matice $\mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{u}$. Pokud existuje jednoduchý vzorec pro řešení (jak pro optimální hodnotu tak optimální argument), napište je.

a) Příklad 1.12.

b) Hledá se vzdálenost bodu $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ od přímky $\{\mathbf{a} + t\mathbf{s} \mid t \in \mathbb{R}\}$ kde $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$.

22

5.8. Máme vektory $\mathbf{u} = (2, 1, -3)$ a $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$. Najděte ortogonální projekci vektoru $(2, 0, 1)$ na podprostor (a) $\text{span}\{\mathbf{u}\}$, (b) $(\text{span}\{\mathbf{u}\})^\perp$, (c) $\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, (d) $(\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^\perp$.

$$(c) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ortog. quojchce } z : A(A^T A)^{-1} A^T z$$

$$z = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\beta = (A^T A)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \sim \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 0 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 0 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 14 & -2 & 21 & 0 \\ 0 & 19 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 14 \cdot 2 \cdot 7 & 0 & 21 & 14 \\ 0 & 2 \cdot 19 & 2 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 19 \cdot 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 19 \cdot 2 & 2 & 14 \end{pmatrix} \sim \underbrace{1/38 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}}_{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$C = A \beta A^T = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 1 & -12 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 34 & -10 & -6 \\ -10 & 13 & -15 \\ -6 & -15 & 29 \end{pmatrix}$$

$$Cz = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 34 & -10 & -6 \\ -10 & 13 & -15 \\ -6 & -15 & 29 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 62 \\ -35 \\ 17 \end{bmatrix} =$$

(d) hledají doplněk

$$\vec{z} = \vec{c} + \vec{d}$$

$$\vec{d} = \vec{c} + \vec{z} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 62 \\ -35 \\ 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 62 & -76 \\ -35 & 38 \\ 17 & -38 \end{bmatrix} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} -14 \\ -35 \\ -21 \end{bmatrix} = \frac{7}{38} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

5.9. Nechť $X = \text{span}\left\{(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}, 0), (0, 0, 0, 1), (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0)\right\}$. Najděte projektoru na podprostor X a podprostor X^\perp .

Jelikož jsou vektory ve spanu orthonormální, můžeme vytvořit matici $U = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Projektor na podprostor X je pak $P = UU^T$

$$P = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 0 & 3/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Projektor na podprostor X^\perp je roven $P^\perp = I - P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.17. Pro vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ukažte, že $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \right\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$.

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^n$$

$$y = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$\|y\|^2 = \underbrace{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}_{\|a\|^2} + \underbrace{b_1^2 + \dots + b_m^2}_{\|b\|^2} \quad \square$$