6.1. Pro každou z těchto funkcí určete, zda je to polynom. Pokud ano, určete počet proměnných a stupeň polynomu a rozhodněte, jestli je polynom homogenní.

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)(x-y) + xy - x - y$
b) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$ kde $\mathbf{a}$ je dáno
c) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$
d) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}\|^2$ kde $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ jsou dány
e) $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$
f) $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{X}) = \mathbf{a}^T\mathbf{X}\mathbf{b}$ kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou dány
g) $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{X}) = \det \mathbf{X}$

(a) je polynom, není homogenní (x a xy), stupně 3 (x^3)

(b) $= a_1x_1 + \dots a_nx_n$ → jedná se o polynom, je homogenní stupně 1

(c) $\|x\| = \sqrt{x^Tx} = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$ → není polynom

(d) $f(x) = \|Ax+b\|^2$, A, b dáno

Ax: $\begin{matrix} A_{m1}x_1 + \dots + A_{mn}x_n \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + \dots + A_{mn}x_n \end{matrix}$ $+b$ $=$ $\begin{matrix} A_{m1}x_1 + \dots + A_{mn}x_n + b_1 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + \dots + A_{mn}x_n + b_m \end{matrix}$

$\left\| \begin{matrix} A_{m1}x_1 + \dots + A_{mn}x_n + b_1 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + \dots + A_{mn}x_n + b_m \end{matrix} \right\|^2 = A_{m1}^2x_n^2 + \dots A_{mn}^2x_n^2 + b_m^2$

polynom stupně 2

(e) $x^Ty = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, homogenní stupně 2

(f) a^TXb, je polynom, homogenní stupně 1

a^T X → $\underbrace{a^TX}_{c}$ → $c_1b_1 + \dots + c_nb_n$

$a_1x_{m1} + \dots a_nx_{m1}$ $\quad a_1x_{m1}b_1 + \dots + a_nx_{mn}b_n$

c_1

(g) $f(X) = \det(X)$, je polynom, je homogenní pro čtvercové matice (X je čtvercová, je homogenní)

6.2. Spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory matic $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, ~~$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$~~.

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) + 2 = -3 - \lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\pm\sqrt{2} - 1}}$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2}+2 & 2 \\ -1 & -2-\sqrt{2} \end{bmatrix} v = 0$$

$\lambda_1 = \sqrt{2}-1 \to v$
$\lambda_2 = -\sqrt{2}-1 \to w$

$$\sim \begin{bmatrix} -\sqrt{2}+2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 + R_2 \cdot (-\sqrt{2}+2)$$

$\longrightarrow v = [2+\sqrt{2}, -1]$

$1 \cdot 2 \quad -(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$
$-1 \cdot -3 \quad -(4-2) = -2$

$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = 4-2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 2 \\ -1 & \sqrt{2}-2 \end{bmatrix} w = 0$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w = 0 \longrightarrow w = [\sqrt{2}-2, 1]$$

$(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2) = 2-4 = -2 \qquad (\sqrt{2}-2)(2+\sqrt{2})$

6.8. Určete definitnost těchto symetrických matic. Zvolte si vhodný způsob, případně více způsobů.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) ~~(b)~~ ~~(c)~~ ~~(d)~~ ~~(e)~~ ~~(f)~~ (g)

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = 2 > 0$
$\Delta_2 = 4-2 = 2 > 0$ $\Rightarrow$ je positivně definitní

(g) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = -2 < 0$
$\Delta_2 = -6 < 0$ $\Rightarrow$ indefinitní

6.16. Co se dá říct o definitnosti symetrické matice (ne nutně diagonální), známe-li znaménka jejích diagonálních prvků? Konkrétně, co se dá říct, jestliže její diagonální prvky jsou (a) $1, 2, 0$, (b) $1, 2, 3$, (c) $-4, -2, -1$, (d) $-1, 2, 0$.

prvky na diag. jsou kladné / nezáporné
matice je positivně / semi def. posit.
obdobně opačně

(a) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ může být positivně semidefinitní
nebo negativně definitní
nebo indefinit.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$ může být positivně (semi) definitní
nebo negativně definitní
nebo indefinit.

(c) $\begin{bmatrix} -4 & & \\ & -2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ může být neg./pos. definitní nebo neg. semidef. nebo indefinit.

(d) $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ je indefinitní