

7.1. Jsou dána čísla $c_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i, j = 1, \dots, n$. Minimalizujte výraz $\sum_i \sum_j c_{ij} x_i x_j$ přes proměnné $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ za podmínky $\sum_i x_i^2 = 1$.

$\min \{x^T C x, x^T x = 1, x \in \mathbb{R}^n\}$ $\sum_i x_i \sum_j c_{ij} x_j = x^T C x$
 minimum je nejmenší vlastní číslo matice C \Rightarrow proto $y = e_n$ a min je λ_n
 $x^T A x = x^T V \Lambda V^T x \stackrel{\text{subst. } y = V^T x}{=} y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \Rightarrow \min \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \\ y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1 \\ y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

7.2. Dokázali jsme, že optimální hodnota úlohy 7.1 je největší vlastní číslo matice A . Bude toto tvrzení platit, i když matice A nebude symetrická?

podm. matice A není symetrická, může mít komplexní vlastní čísla
 tvrzení potom tedy platit nebude

7.5. Přidejme k úloze (7.1) omezení, že x musí být kolmé na vlastní vektory v_1, \dots, v_k . Tedy maximalizujeme $x^T A x$ přes $x \in \mathbb{R}^n$ za podmínek $x^T x = 1$ a $v_1^T x = \dots = v_k^T x = 0$. Dokažte, že optimální hodnota této úlohy je λ_{k+1} a optimum se nabývá pro $x = v_{k+1}$.

$x^T A x = x^T V \Lambda V^T x \stackrel{\text{subst. } V^T x = y}{=} y^T \Lambda y =$

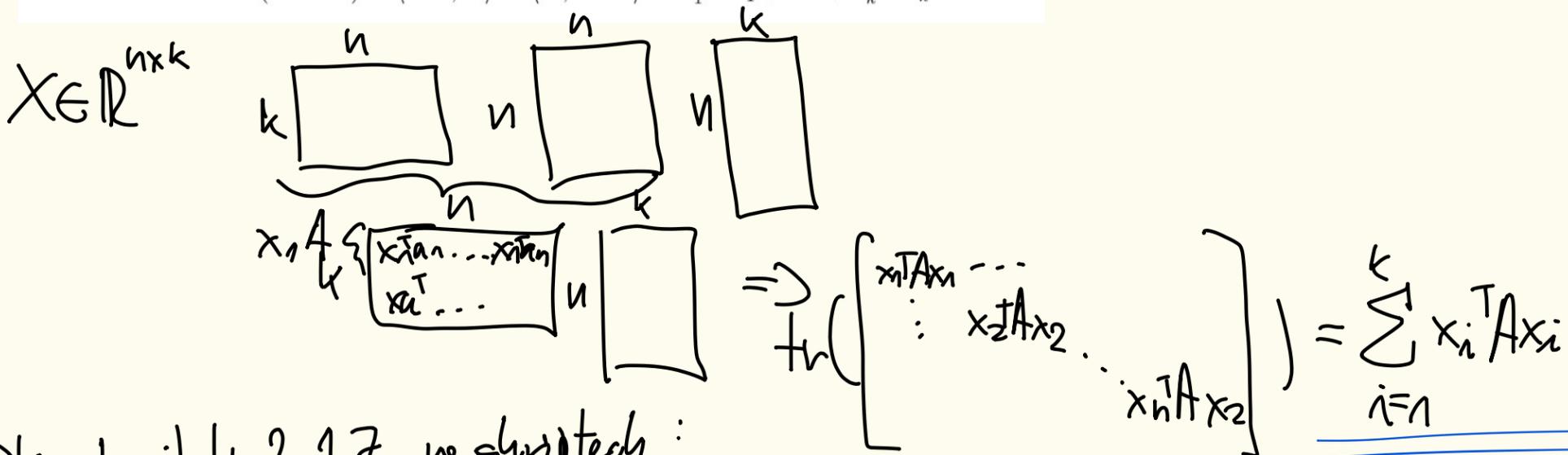
pro $k < n$

$= \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_k y_k^2 + \lambda_{k+1} y_{k+1}^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

$\Rightarrow \max \left\{ \begin{array}{l} y^T y = 1, v_1^T y = \dots = v_k^T y = 0 \end{array} \right\}$
 (největší pro který již neplatí $v_i^T y = 0$)
 potom největší λ je λ_{k+1} , optimum v $x = v_{k+1}$

7.6. Jsou-li x_1, \dots, x_k sloupce matice X , dokažte tyto rovnosti (srov. (7.4)):

$\text{tr}(X^T A X) = \langle A X, X \rangle = \langle A, X X^T \rangle = x_1^T A x_1 + \dots + x_k^T A x_k$



Dle kapitoly 2.1.7 ve shorptech:

$\langle A X, X \rangle = \langle X, A X \rangle = \text{tr}(X^T A X) = \text{tr}(X X^T A) = \text{tr}((X X^T)^T A) =$
 $= \langle X X^T, A \rangle = \langle A, X X^T \rangle$

7.13. Komutuje operace ortogonální projekce s operací těžiště? Tj., když body $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ortogonálně promítneme na podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^m$ a pak najdeme těžiště výsledných bodů, dostaneme stejný bod, jako když nejdříve spočítáme těžiště bodů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ a pak ho promítneme na podprostor X ? Odpověď dokažte.

Těžiště můžeme definovat jako

$$T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{a}_i$$

Projekci bodů na podprostor X označím P_X , chceme dokázat:

$$P_X(T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) = T(P_X(\mathbf{a}_1), \dots, P_X(\mathbf{a}_n))$$

$$P_X\left(\frac{1}{n} \sum_i \mathbf{a}_i\right) = \frac{1}{n} \sum_i P_X(\mathbf{a}_i)$$

↓ Projekce je lin.

$$\frac{1}{n} \sum_i P_X(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{n} \sum_i P_X(\mathbf{a}_i) \quad \square$$