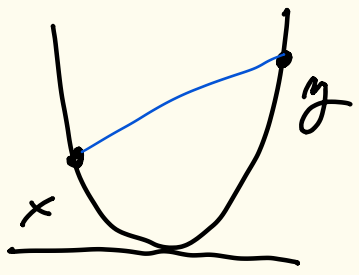
13.1. Odpovězte, zda následující množiny jsou konvexní a odpověď dokažte z definice konvexní množiny:

a) interval $[a, b]$
b) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$
c) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \}$
~~d~~ $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \geq x^2 \}$
e) $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{Cx} = \mathbf{d} \}$
~~f~~ $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{x} \leq 1 \}$
g) $\mathbb{Z}$ (množina celých čísel)

(a) $x, y \in [a, b]$
body leží na přímce, jejich spojnice taktéž leží na přímce
je konvexní

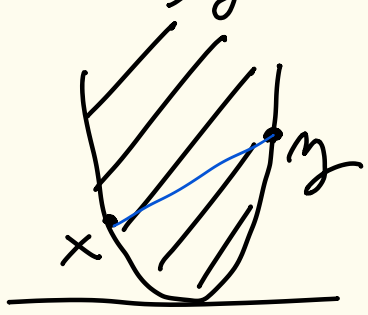
(b)



není konvexní

spojnice x, y neleží v X

(c)



jakékoli v body $x, y \in X$
a jejich spojnice bude ležet v X

(e) vektory $u, v \in X$
$Au \leq b \quad Cu = d$
$Av \leq b \quad Cv = d$

$w = (1-\alpha)u + \alpha v$

$Aw = A((1-\alpha)u + \alpha v)$
$= (1-\alpha)Au + \alpha Av \leq$
$\leq (1-\alpha)b + \alpha b =$
$b - \alpha b + \alpha b = \underline{\underline{b}}$

$Cw = C((1-\alpha)u + \alpha v)$
$= (1-\alpha)Cu + \alpha Cv =$
$= (1-\alpha)d + \alpha d = \underline{\underline{d}}$

je konvexní

(g) množina $\mathbb{Z}$ není konvexní,
vezmeme spojující dva body ze $\mathbb{Z}$ totiž není v $\mathbb{Z}$

13.2. Jsou následující množiny konvexní? Odpověď nemusíte dokazovat z definice kovexní množiny, stačí uvést přesvědčivý argument. Jestliže množina není konvexní, napište její konvexní obal jako množinu řešení soustavy (co možná nejjednodušší) rovnic a nerovnic.

a) $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \}$
b) $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 = 1 \}$
~~c~~ $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 < 1 \}$
~~d~~ $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$
e) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy = 1 \}$
f) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2 \} \cap \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 2 \}$
g) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \}$
h) $\{-1, 0, 1\}$
i) $\{(1, 1), (2, 2)\}$
j) $\{(1, 1), (1, 2), (3, 1)\}$

(a) $u = (u_1, \ldots, u_n)$
$v = (v_1, \ldots, v_n)$

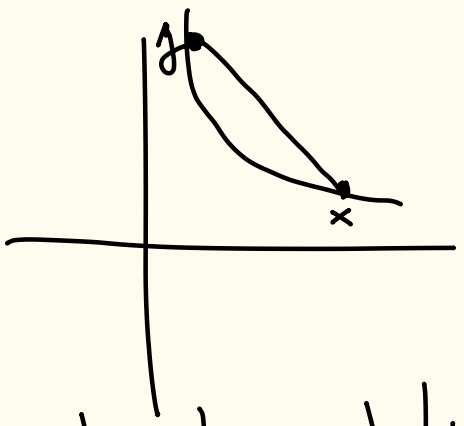
je konvexní

$(1-\alpha)\overbrace{(u_1 \ldots u_n)}^{1} + \alpha\overbrace{(v_1, \ldots, v_n)}^{1} =$

$= 1 - \alpha + \alpha = 1$

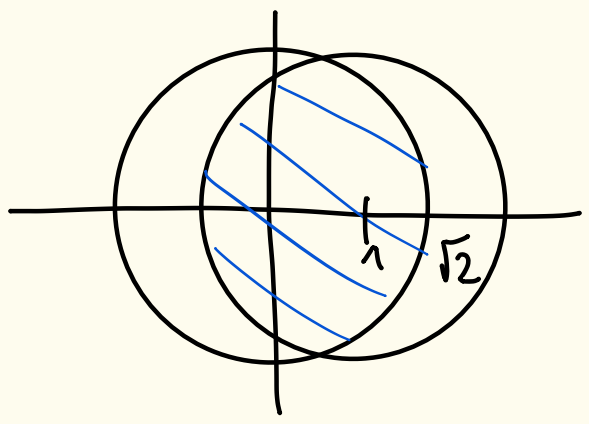
(b) jedná se o n-dim. sféru (její povrch)
ta není konvexní, konvexní obal $\|x\| \leq 1$

(e)



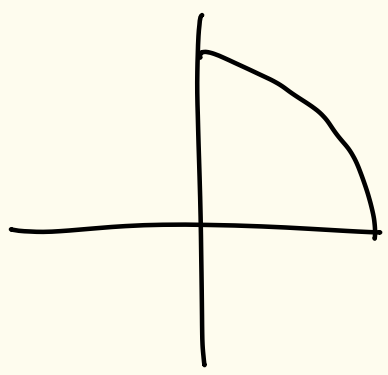
větev hyperboly v prvním kvadrantu, není konvexní
konvexní obal $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geq 1,\ x>0,\ y>0\}$

(f)



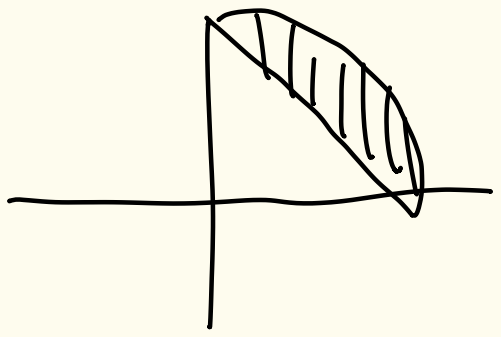
jedná se o průnik dvou koulí (konvexních množin)
průnik je také konvexní

(g)



čtvrt kružnice, je nekonvexní

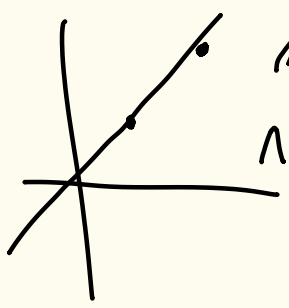
konvexním obalem pak bude množina



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq -x+1\}$

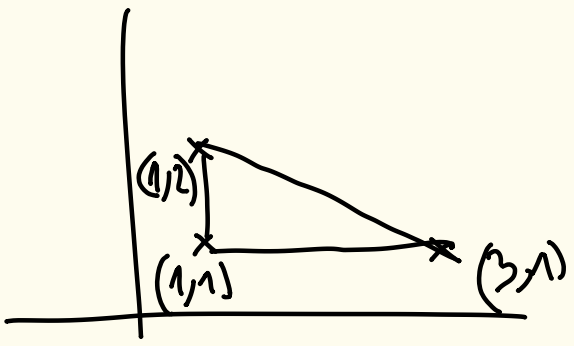
(h) diskrétní body ze $\mathbb{Z}$ nejsou konvexní množina,
konvexním obalem bude interval $[-1,1]$

(i) stejný případ) jedná se o nekonvex. množinu
konvex. obal:



$y=x$
$1 \leq y \leq 2$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y \mid 1 \leq y \leq 2\}$

(j)



3 body, nekolmeční, konvexním obalem je trojúhelník

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1 \mid x \geq 1 \mid x+2y \leq 5\}$

$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

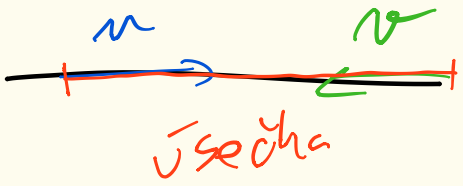
$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $x+2y=d$ $\rightarrow$ $x+2y=5$

$1+4=d$

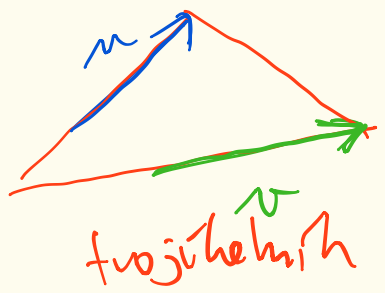
13.5. Nakreslete lineární, afinní, nezáporný a konvexní obal náhodně zvolených k vektorů v $\mathbb{R}^n$ pro všech devět případů $k, n \in \{1, 2, 3\}$.

pro $k=1$ je konvex. obal triviální (je to úsečka)

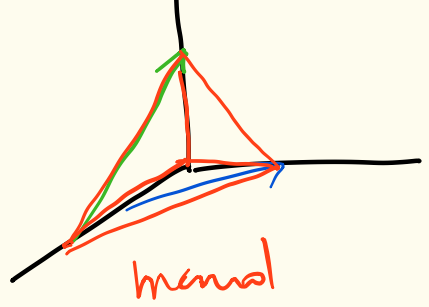
$k=2$ $n=1$



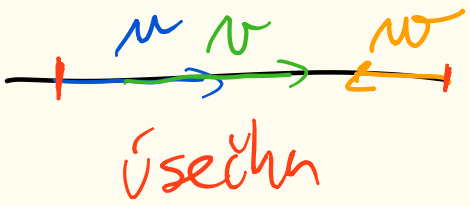
$k=2$ $n=2$



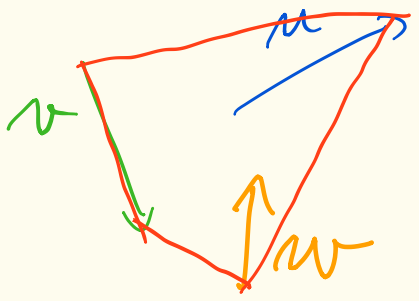
$k=2$ $n=3$



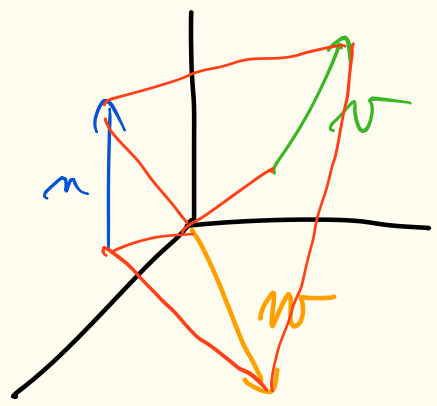
$k=3$ $n=1$



$k=3$ $n=2$



$k=3$ $n=3$



13.7. Jsou následující množiny konvexní mnohostěny? Zápornou odpověď odůvodněte. Kladnou odpověď dokažte tak, že množinu napíšete jako množinu řešení soustavy konečně mnoha lineárních nerovnic (tj. jako průnik konečně mnoha poloprostorů).

a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \leq 1\}$, kde $\mathbf{C}$ je positivně definitní

b) $\{\alpha\mathbf{v} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, kde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

c) (⋆) $\{\mathbf{C}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$, kde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

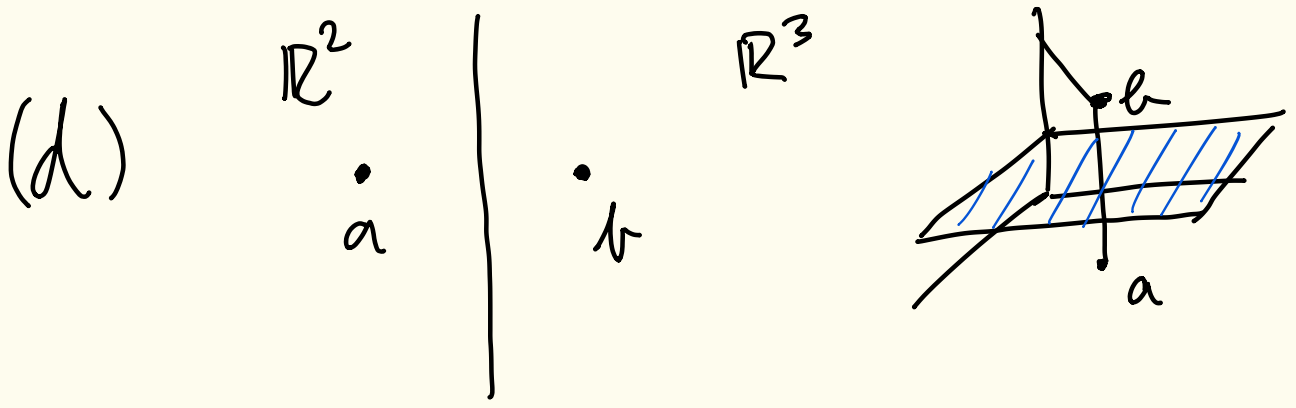
d) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2\}$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou dány

(a) jedná se o elipsoid, což je mnohostěn $\rightarrow$ má spojitý povrch

(b) jedná se o přímku v $\mathbb{R}^n$, ta je konvexní mnohostěn

řešení by se dalo napsat jako průnik $n-1$ nadrovin

(d)



jedná se o konvex. mnohostěn

důkaz?