12.15. Rozhodněte (a odpověď dokažte), pro jaká n je následující funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ norma:

a) $f(\mathbf{x}) = |\max\{x_1, \ldots, x_n\}|$
b) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{x}\|_2$
c) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_2$ (argument této funkce je vektor $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-k}$)

axiomy:
(i) $\|x\| = 0$ iff $x = 0$
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}^n$
(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(a) $\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_f \to 0$ ale $x \neq 0$

$f(x)$ není norma pro $n \geq 2$ (neplatí (i))

pro $n = 1$: $\|[x]\|_f \to |x|$ pro $n = 1$ je normou (platí (i), (ii) i (iii))

(b) $f(x) = \underbrace{|x_1| + \ldots + |x_n|}_{a} + \underbrace{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}}_{b}$

(i) a i $b = 0$ iff $x = 0$ platí $\forall n \in \mathbb{R}$

(ii) $f(\alpha x) = \|\alpha x\|_1 + \|\alpha x\|_2 = |\alpha| \|x\|_1 + |\alpha| \|x\|_2 =$
$= |\alpha| (\|x\|_1 + \|x\|_2) = |\alpha| f(x)$ $\forall n \in \mathbb{R}$

(iii) $f(x+y) = \|x+y\|_1 + \|x+y\|_2 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 + \|x\|_2 + \|y\|_2$
$= f(x) + f(y)$ $\forall n \in \mathbb{R}$ □

(c) $f(x, y) = \|x\|_1 + \|y\|_2$ $x \in \mathbb{R}^k$ $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ $(x, y) \in \mathbb{R}^n$

(i) platí, když normy musí být nulové → nulový vektor

(ii) $f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x\|_1 + \|\alpha y\|_2 =$
$= |\alpha| \|x\|_1 + |\alpha| \|y\|_2 = |\alpha| (\|x\|_1 + \|y\|_2) = |\alpha| f(x, y)$
platí $\forall n$

(iii) $f((x,y)+(a,b)) = f(x+a, y+b) = \|x+a\|_1 + \|y+b\|_2 =$

$\leq \|x\|_1 + \|a\|_1 + \|y\|_2 + \|b\|_2 = f(x,y) + f(a,b)$

platí $\forall n$ □

16.1. Pro každou funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dokažte z podmínky (16.1), které z těchto čtyř tvrzení platí (a pro jaké n): funkce je konvexní, konkávní, konvexní i konkávní, ani konvexní ani konkávní.

a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} + b$
b) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$
c) $f(\mathbf{x}) =$ aritmetický průměr čísel $x_1, \ldots, x_n$
d) $f(\mathbf{x}) = \text{median}_{i=1}^n x_i$ (medián čísel $x_1, \ldots, x_n$)
e) $f(\mathbf{x}) = \min_{i=1}^n |x_i|$

má platit

$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$

(a) afinní funkce je konkávní i konvexní

$f((1-\alpha)x + \alpha y) = a^T((1-\alpha)x + \alpha y) + b =$

$= (1-\alpha)a^Tx + \alpha a^Ty + b \overset{?}{\leq} (1-\alpha)a^Tx + (1-\alpha)b + \alpha a^Ty + \alpha b$

$= (1-\alpha)a^Tx + \alpha a^Ty + b$ platí rovnost, fce je konkávní konvexní

(b) $f(x) = x^Tx$ (kvadratická norma x^TIx, I pos. def., je konvexní)

$f((1-\alpha)x + \alpha y) = ((1-\alpha)x + \alpha y)^T((1-\alpha)x + \alpha y) =$

$= (x^T(1-\alpha) + \alpha y^T)((1-\alpha)x + \alpha y)) =$

$= (1-\alpha)^2 x^Tx + \alpha(1-\alpha)x^Ty + (1-\alpha)y^Tx + \alpha^2 y^Ty \overset{?}{\leq} (1-\alpha)x^Tx + \alpha y^Ty$

x^Ty

$(1-\alpha)^2 x^Tx - \alpha^2 x^Ty + x^Ty + \alpha^2 y^Ty$

$\underbrace{(1-\alpha^2)}_{\geq 0} x^Tx + \underbrace{(1-\alpha^2)}_{\geq 0} x^Ty + \alpha^2 y^Ty$

(c) $f(x) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) = \frac{(1-\alpha)x_1 + \alpha y_1 + \dots}{n} = (1-\alpha)\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \alpha \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} =$$

$= f((1-\alpha)x) + f(\alpha y)$ je konkávní i konvexní

(d) $\text{median}_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \begin{cases} n \text{ liché} \to x_{\lceil n/2 \rceil} \\ n \text{ sudé} \to \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2} \end{cases}$

(e) $f(x) = \min_{i=1}^{n} |x_i|$

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) = \min_i \left| (1-\alpha)x_i + \alpha y_i \right|$$

$$\geq \min_i (1-\alpha)x_i + \min_i \alpha y_i$$

$$= (1-\alpha)\min_i x_i + \alpha \min_i y_i$$

$$= (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y) \quad \text{je konkávní}$$

16.3. Pro každou funkci dokažte, které z těchto čtyřech tvrzení platí: funkce je konvexní, konkávní, konvexní i konkávní, ani konvexní ani konkávní. Můžete použít podmínku (16.1) a věty z §16.2 a §16.3.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

c) $f(x, y) = |x - y|$

d) $f(x, y) = -y$

e) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$

(a) $f(x) = e^{x^2}$ $f'(x) = 2xe^{x^2}$ $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ fce je konvexní

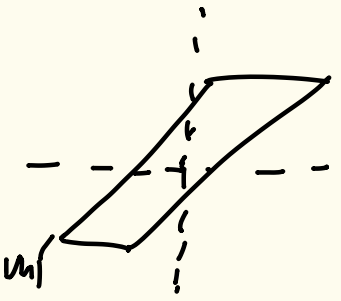
(b) $f(x) = e^{-x^2}$ $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ není konkávní ani konvexní (pouze na intervalech)

(c) $f(x,y) = |x-y|$? postup

konvexní

(d) $f(x,y) = -y$



konvexní i konkávní

$\Rightarrow f(y) = -y$ $f'(y) = -1$

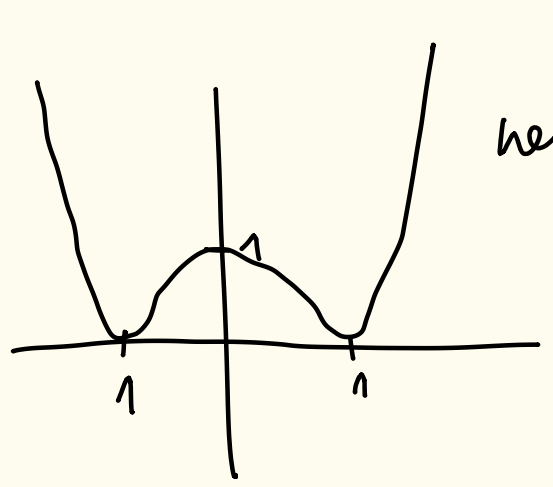
$f''(y) = 0$

(e) $f(x) = \|Ax - b\|^2$?

16.4. Máme funkci jedné proměnné $f(x) = (x^2 - a)^2$. Pro jaké hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je tato funkce konvexní? Načrtněte graf funkce pro nějaké a, pro které funkce není konvexní.

konvexní pro $a \in (-\infty, 0>$

$a = 1$



není konvex

16.8. Co je subkontura výšky 2 funkce jedné proměnné $f(x) = x^2 - x$?

$x \in \chi, f(x) \leq y$

$f(2) = 4 - 2 = 2$

$f(k) \leq 2$ $x^2 - x - 2 \leq 0$ $x \in \langle -2, 1 \rangle$

$x^2 - x \leq 2$ $(x-2)(x+1) \leq 0$