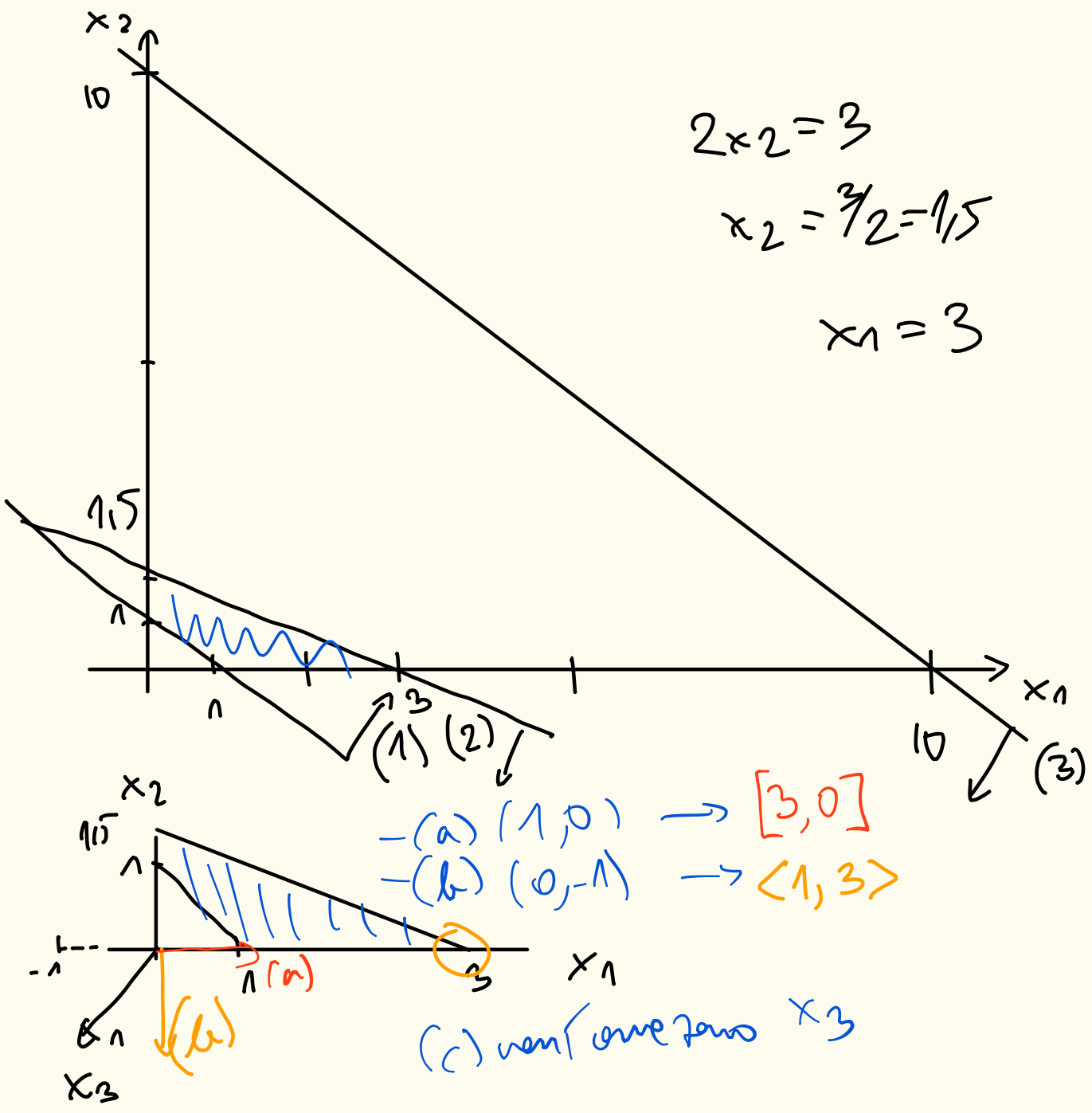
12.1. Najděte graficky množinu optimálních řešení úlohy

$$\begin{array}{rl} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{za podm.} & x_1 + \ x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 + \ x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

pro následující případy: (a) $\mathbf{c} = (-1, 0, 1)$, (b) $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$, (c) $\mathbf{c} = (0, 0, -1)$.



12.2. Následující úlohy nejprve převeďte na rovnicový tvar (tj. tvar s nezápornými proměnnými a omezeními typu lineární rovnice, viz §12.1). Potom je převeďte do maticové formy $\min\{\, \mathbf{r}^T\mathbf{u} \mid \mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{q},\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \,\}$ (výsledkem tedy budou $\mathbf{u}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$).

a)
$$\begin{array}{rl} \min & 2x_1 \quad - 3x_3 + \ x_4 \\ \text{za podmínek} & x_1 - \ x_2 - \ x_3 \quad\quad \geq 0 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \quad\quad \leq 5 \\ & 2x_1 - \ x_2 - \ x_3 + 2x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

b) lineární program (12.11)

(a) zavedeme slack. proměnné v, w

$\min\ 2x_1 - 3x_3 + x_4$

$x_1 - x_2 - x_3 - v = 0$

$-x_1 - 2x_2 - x_3 + w = 5$

$2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4, v, w \geq 0$

$r = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ v \\ w \end{bmatrix}$ $q = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12.3.3 Dopravní úloha

Máme m skladů a n spotřebitelů.

- a_i = množství ve skladě i
- b_j = množství zboží požadované spotřebitelem j
- c_{ij} = cena dopravy jednotky zboží ze skladu i ke spotřebiteli j
- x_{ij} = množství zboží vezené ze skladu i ke spotřebiteli j

Chceme co nejlevněji rozvézt zboží ze skladů ke spotřebitelům. Řešením je lineární program

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad \text{(a)} \qquad (12.11a)$$

$$\text{za podm.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m \qquad \text{(b)} \qquad (12.11b)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n \qquad \text{(c)} \qquad (12.11c)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \qquad (12.11d)$$

Ten jde také napsat jako (rozmyslete!)

$$\min\{\, \langle \mathbf{C}, \mathbf{X} \rangle \mid \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \mathbf{X}\mathbf{1} = \mathbf{a},\ \mathbf{X}^T\mathbf{1} = \mathbf{b},\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \,\}, \qquad (12.12)$$

kde $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, $\langle \mathbf{C}, \mathbf{X} \rangle$ značí skalární součin matic (2.7) a optimalizujeme přes matice $\mathbf{X} = [x_{ij}]$.

Zadání musí splňovat $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (nabídka je rovna poptávce), jinak je úloha nepřípustná. To snadno vidíme: součet levých stran rovnic (12.11b) je roven součtu levých stran rovnic (12.11c). Úlohu lze modifikovat tak, že dovolíme $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$, tedy zboží na skladech může být více, než žádají spotřebitelé. Pak by se omezení (12.11b) muselo změnit na $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i$ (promyslete!).

(b)

$u = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix}$ $r = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Pro $x_{11} \dots x_{1n}$ musí v prvním řádku matice

$\overbrace{1\,1 \dots 1\,0 \dots 0}^{n}$, aby platilo $\sum_i x_{1i} = a_1$

toto platí pro prvních m řádků (splňují (ř))

Zbytek matice bude plný jedniček pro splnění podmínky (C)

$$A = \begin{matrix} \overbrace{}^{n} \\ m\{ \\ n\{ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1\dots10\dots0 \\ 0\dots01\dots10\dots0 \\ \vdots \\ 0\dots00\dots01\dots1 \\ 1\dots \\ 1\dots \end{bmatrix}$$

12.3. Vyřešte úvahou tyto jednoduché lineární programy a napište (jednoduchý) výraz pro optimální hodnotu. Odpovědi dokažte. Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ a číslo $k \in \{1, \dots, n\}$ jsou dány.

a) $\max\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{0} \le \mathbf{x} \le \mathbf{1} \,\}$

přepíšeme jako $\max\{\sum_i c_i x_i,\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le x_i \le 1\ \forall i\}$

maximum bude takový vektor, který má

0 na místě, kde je $c_i \le 0$ a

1 na místě, kde $c_i > 0$.

Lze vzít i na úlohy $\max\{c_i x_i\}$, $\min$

potom je řešením $\sum_i \max\{c_i x_i\}$

12.4. Pokuste se úlohy transformovat na LP. Pokud to nedokážete, vysvětlete proč.

a) $\min\{\, |x_1| + |x_2| \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ 2x_1 - x_2 \ge 1,\ -x_1 + 2x_2 \ge 1 \,\}$

dle tvrzení ze skript zavedeme pomocnou y s vlastností $y \ge f \Rightarrow$ naší účelová funkce je lineární, řešíme potom úlohu:

$$\min \left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2 \mid x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \\ \underbrace{y_1 \ge x_1,\ y_1 \ge -x_1}_{2\ \text{abs. h.}},\ \underbrace{y_2 \ge x_2,\ y_2 \ge -x_2}_{2\ \text{abs. h.}} \\ 2x_1 - x_2 \ge 1,\ -x_1 + 2x_2 \ge 1 \end{array} \right\}$$

12.9. Firma na výrobu kánoí má 120 zaměstnanců, z nichž každý pracuje maximálně 30 hodin týdně. Polovina zaměstnanců pracuje v truhlářské dílně, 20 zaměstnanců pracuje v dílně na zpracování plastů a zbytek v kompletační dílně. Firma vyrábí dva typy kánoí: standardní kánoe s čistým ziskem 7 EUR za kus a luxusní kánoe s čistým ziskem 10 EUR za kus. Na výrobu jedné standardní kánoe je třeba 4.5 hodiny práce v truhlářské dílně a dvě hodiny v každé ze zbylých dvou dílen. Jedna luxusní kánoe vyžaduje 5 hodin práce v truhlárně, hodinu v dílně na plasty a 4 hodiny kompletace. Průzkum trhu odhalil, že ne méně než 1/3 a ne více než 2/3 vyrobených kánoí by měly být luxusní. Kolik kterých kánoí má firma týdně vyrobit, aby byl její čistý zisk maximální? Formalizujte jako optimalizační úlohu, kterou už ale neřešte.

max $7 \cdot k_S + 10 \cdot k_L$

k_S ... kánoe standardní

k_L ... kánoe luxusní

z_i ... zaměstnanec i

$i = 1 \dots 60$ truhlářství $= j$

$61 \dots 80$ zpracování plastů $= k$

$81 \dots 120$ kompletace $= l$

z.p. $4{,}5 z_j + 2 z_k + 2 z_l = k_S$

$5 z_j + z_k + 4 z_l = k_L$

$z_i \le 30 \quad i = 1 \dots 120$

$k_L < 2/3 \cdot (k_L + k_S)$

$k_L > 1/3 \cdot (k_L + k_S)$