Dualita v LP

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + x_2 + 3x_3 = f(x) \\ \text{z.p.} \quad & x_1 + 4x_2 \leq 1 \quad | \cdot 2 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \quad | \cdot 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

opt. hodnota

Odhad mez $x = (1,0,0)$ $f(x) = 4$

$x = (0,0,3)$ $f(x) = 9 \leq \nu$

Horní mez!

$$\textcircled{+} \quad 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11$$

$$9 \leq \nu \leq 11$$

VI

$$f(x) = 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 1 \quad | \cdot y_1 \geq 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad | \cdot y_1 \geq 0 \end{aligned}$$

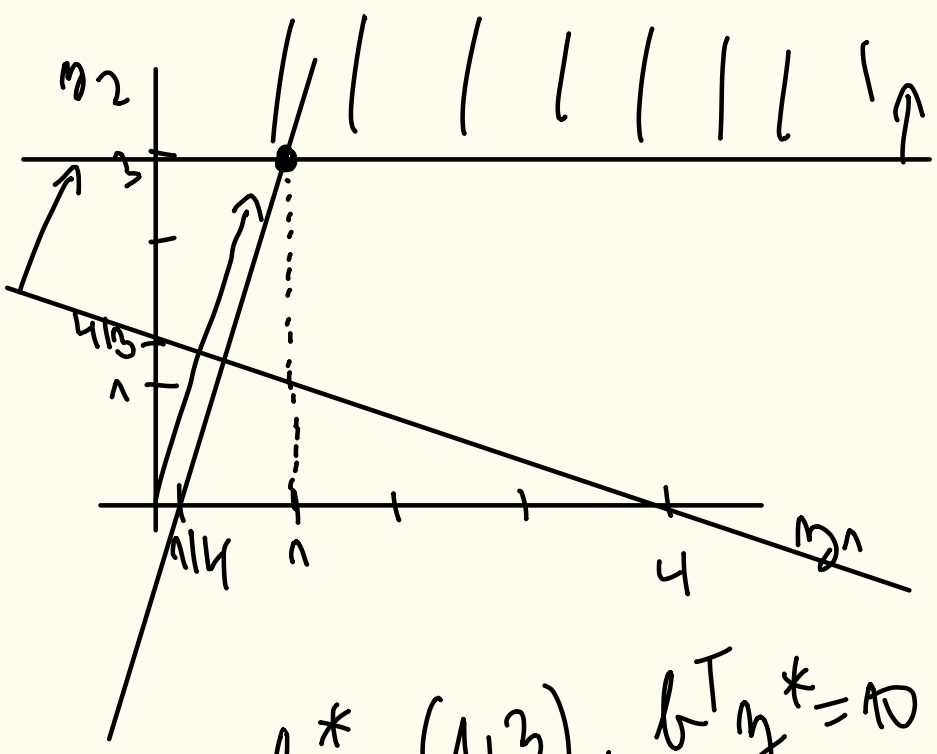
$$\textcircled{+} \quad (y_1 + 3y_2)x_1 + (4y_1 - y_2)x_2 + y_2 x_3 \leq \boxed{y_1 + 3y_2}$$

MIN

VI: $y_1 + 3y_2$ = 4; $4y_1 - y_2$ = 1; y_2 = 3

Duální

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 3y_2 \qquad b^T y \\ \text{z.p.} \quad & y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ & 4y_1 - y_2 \geq 1 \qquad A^T y \geq c \\ & y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$y^* = (1,3)$, $b^T y^* = 10$

$0 \le x \le 10$

$x^* = (0, 1/4, 13/4)$

Primární úloha

$f(x^*) = c^T x^* = 40/4 = 10 = v$

max → ← min

$c^T x$ | $b^T y$

x, y ... přípustné řešení (P) a (D)

$c^T x = (y^T A) x = y^T (Ax) \ge y^T b = b^T y$

$b^T y \le c^T x^* = b^T y^* \le c^T x$ $\forall x, y$ přípustné

$b^T y \longrightarrow \longleftarrow c^T x$

(D) max | (P) min

1) $y_1^* + 3y_2^* > 4$, $x_1^* = 0$

$4y_1 - y_2^* = 1$

$y_2^* = 3$

$c^T x = y^T A x = b^T y$

$(c^T - y^T A) x = 0$ $y^T (Ax - b) = 0$

2) $x_1^* + 4x_2^* = 1$

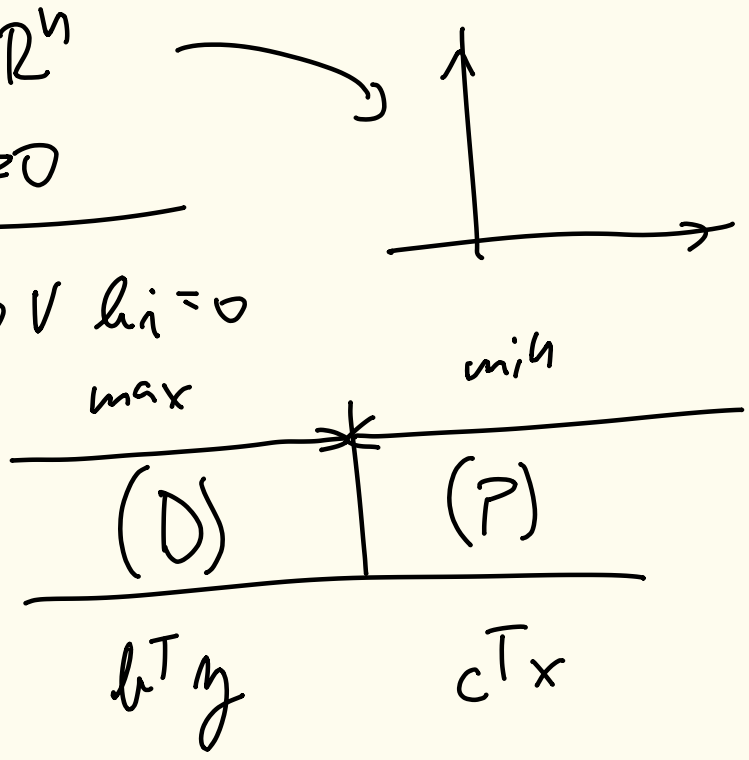
$3x_1^* - x_2^* + x_3^* = 3$

$a^T b = 0$

$a, b \in \mathbb{R}^n$

$a_i, b_i \ge 0$

$\forall i : a_i = 0 \vee b_i = 0$



$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ (množství v l vína – C, B, R)

$$\max\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$2x_1 \text{ (t/l)} \leq 4$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 8$$

$$3x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_i \geq 0$$

(P) řeší malé vinařství

konkurence chce odkoupit zásoby,
ale za jaké ceny $y_1, y_2, y_3 \geq 0$?

$$\min\ 4y_1 + 8y_2 + 6y_3$$

$$\text{z.p.}\quad 2y_1 + y_2 \text{ (hl/l)} \geq 3 \text{ (hl/l)}$$

$$3y_2 \geq 4$$

$$2y_2 + y_3 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

SLABÁ
celkové náhlady
VI
celkový zisk
SILNÁ

PID	mít optimum	horní mez	hospodárný
mat opt.	✓	×	+
neom. nepř.	×	×	✓
	×	✓	✓