Nelineární metoda nejmenších čtverců

diferencovatelná f

sestupný směr $\Leftrightarrow$ ostrý úhel s $f'(\vec{x})$

$\Leftrightarrow \exists$ poz. def. P:

$$\vec{v} = P \cdot f'(\vec{x})^T$$

$x^2 + y^2 = 1$

$y = x^3$

$2y = x + 1$

$$\vec{g}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^3 - y \\ x - 2y + 1 \end{bmatrix}$$

minimalizujeme

$$f(x,y) = \|\vec{g}(x,y)\|^2 =$$

$$= \vec{g}(x,y)^T \cdot \vec{g}(x,y) = (x^2+y^2-1) + (x^3-y)^2 + (x-2y+1)^2$$

$$f'(x,y)^T = 2 \cdot \vec{g}'(x,y)^T \cdot \vec{g}(x,y)$$

$$g'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{výchozí bod}$$

$$\vec{g}(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{g}'(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$f(x_0,y_0)$

$$f'(x_0,y_0)^T = 2\vec{g}'(x_0,y_0)^T \cdot \vec{g}(x_0,y_0)$$

$$= 2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Grad. m. $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha_0 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\varphi(\alpha_0) = f\left(\begin{bmatrix} 1-4\alpha_0 \\ 1-4\alpha_0 \end{bmatrix}\right)$ fuj!

$$f''(x,y) = 2\left(\vec{g}'(x,y)^T \cdot \vec{g}'(x,y)\right) +$$

$$+2 \cdot \sum_{i=1}^{n} g_i(x,y) \cdot \vec{g}_i''(x,y)$$

Newton. m.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = -f''(x_0,y_0)^{-1} \cdot f'(x_0,y_0)^T$$

$$g_1''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad g_2'' = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_3''(x,y) = 0$$

Newton:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = -f''(x_0,y_0)^{-1} \cdot f'(x_0,y_0)^T$$

$$= \left(2\left(\begin{bmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$\vec{g}(x_0,y_0)^T \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\left(2\begin{bmatrix} 16 & -1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = -1/2 \cdot 1/175 \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-2}{175} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,14 \\ -0,19 \end{bmatrix}$$

Gaussova Newtonova metoda

Spec. případ: převrácená nehomog. soust. lin. rovnic $Ax - b = 0$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$A^+$$

Zobrazení g aproximujeme v okolí bodu x_k afinním zobrazením T_k

Gauss - Newton. m.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -1/125 \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \quad -11- \quad \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -1/125 \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix} =$$

$$= -1/25 \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}16 \\ -0{,}24 \end{bmatrix}$$

Levenberga - Marquardta

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} + \mu_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14+\mu_0 & -1 \\ -1 & 9+\mu_0 \end{bmatrix}^{-1} \quad \cdots$$